PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 47 (61), 1990, 113–120

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕНЗОРОВ И ПСЕВДОТЕНЗОРОВ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА НЕСИММЕТРИЧНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Светислав М. Минчич

Резюме. Используя 4 рода ковариантной производной тензора в пространстве несимметричной аффиной связности, мы в работах [**2**], [**3**] получили 4 тензора кривизны и 15 величин, которые назвали „псевдотензорами кривизны" этого пространства, потому что они имеют форму и играют роль тензора кривизны, но тензорами не являются. В [**6**] являются 8 „выведенных" тензоров кривизны, как линейные комбинации псевдотензоров кривизны.

В [**5**], [**7**] рассматриваются геометрические интерпретации первых 4 тензора кривизны. Цель настоящей работы — дать геометрические интерпретации всех вышеупомянутых тензоров и псевдотензоров кривизны.

1. В пространстве L_N несимметричной аффиной связности L^i_{jk} можно определить 4 рода ковариантной производной [**2**], [**3**]. Например, для тензора a^i_j имеем

(1a) $$a^i_{j\underset{1}{|}m} = a^i_{j,m} + L^i_{pm}a^p_j - L^p_{jm}a^i_p,$$

(1b) $$a^i_{j\underset{2}{|}m} = a^i_{j,m} + L^i_{mp}a^p_j - L^p_{mj}a^i_p,$$

(1c) $$a^i_{j\underset{3}{|}m} = a^i_{j,m} + L^i_{pm}a^p_j - L^p_{mj}a^i_p,$$

(1d) $$a^i_{j\underset{4}{|}m} = a^i_{j,m} + L^i_{mp}a^p_j - L^p_{jm}a^i_p,$$

где $a^i_{j,m} = (\partial/\partial x^m)a^i_j$.

На основе общих формул в [**2**] мы получаем 10 тождеств типа Риччи

(2) $$a^i_{j\underset{1}{|}mn} - a^i_{j\underset{1}{|}nm} = \underset{1}{R}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{1}{R}{}^p{}_{jmn}a^i_p - 2L^p_{\underbrace{mn}}a^i_{j\underset{1}{|}p},$$

(3) $$a^i_{j\underset{2}{|}mn} - a^i_{j\underset{2}{|}nm} = \underset{2}{R}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{2}{R}{}^p{}_{jmn}a^i_p + 2L^p_{\underbrace{mn}}a^i_{j\underset{2}{|}p},$$

(4) $$a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{1}{|}n\underset{2}{|}m} = \underset{1}{A}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{2}{A}{}^p{}_{jmn}a^i_p$$

AMS Subject Classification (1985): Primary 53 B 05

$$+ 4a^i_{j<\underset{\smile}{mn}>} + 4a^i_{j\leqslant\underset{\smile}{mn}\geqslant} + 2L^p_{\underset{\smile}{mn}}a^i_{j\underset{1}{|}p},$$

. . . .

$$\begin{aligned} a^i_{j\underset{1}{|}m\underset{2}{|}n} - a^i_{j\underset{2}{|}n\underset{1}{|}m} &= \underset{15}{A}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{15}{A}{}^p{}_{jmn}a^i_p - L^p_{nm}(a^i_{j\underset{1}{|}p} - a^i_{j\underset{2}{|}p}) \\ &= \underset{3}{R}{}^i{}_{pmn}a^p_j - \underset{3}{R}{}^p{}_{jmn}a^i_p, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm}L^i_{pn} - L^p_{jn}L^i_{pm}, \tag{6}$$

$$\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{mp}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} &= L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{pm} + L^p_{nm}(L^i_{pj} - L^i_{jp}) \\ &= \underset{15}{A}{}^i{}_{jmn} + L^p_{nm}(L^i_{pj} - L^i_{jp}), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\underset{1}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{jn}L^i_{mp}, \tag{9}$$

. . . .

$$\underset{15}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{pm}, \tag{10}$$

$$a^i_{j<mn>} = L^i_{\underset{\smile}{pm}}a^p_{j,n} - L^p_{\underset{\smile}{jm}}a^i_{p,n}, \tag{11}$$

$$a^i_{j\leqslant mn\geqslant} = (L^i_{mp}L^s_{jn} - L^i_{pm}L^s_{nj})a^p_s, \tag{12}$$

а $\underset{\smile}{mn}$ означает антисимметрирование по m, n, запятая означает частную производную.

Величины $\underset{1}{R}{}^i_{jmn}$, $\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn}$, $\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn}$ — тензоры и мы называем их тензорами кривизни рядом 1-го, 2-го и 3-го рода, а величини $\underset{1}{A}{}^i{}_{jmn}, \dots, \underset{15}{A}{}^i{}_{jmn}$ нет тензоры и мы называем их псевдотензорами кривизны 1-го, …, 15-го рода.

Если при образованию тождеств типа Риччи мы используем 3-ий и 4-ий род ковариантной производной, получаются новые тождества которые похожие предыдущими. В этими тождествами появляются те же величины $\underset{1}{R}, \underset{2}{R}, \underset{3}{R}; \underset{1}{A}, \dots, \underset{15}{A}$, но в ином порядке. Лишь в последнем случае появляется новый тензор кривизны $\underset{4}{R}$:

$$a^i_{j\underset{3}{|}m\underset{4}{|}n} - a^i_{j\underset{4}{|}n\underset{3}{|}m} = \underset{4}{R}{}^i{}_{pmn}a^p_j + \underset{3}{R}{}^p{}_{jnm}a^i_p, \tag{13}$$

где

$$\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} = \underset{15}{A}{}^i{}_{jmn} + L^p_{mn}(L^i_{pj} - L^i_{jp}) \tag{14}$$

тензор кривизны 4-го рода пространства L_N.

2. Вдоль кривой C в L_N которая определенная уравнениями

$$x^i = x^i(t) \tag{15}$$

можно определить два рода абсолютной производной и, на основе этого, два рода параллельного переноса вектора. Для векторного поля $a^i(t)$ говорим что это поле параллельных векторов первого, т.е. второго рода, если

(16a,b) $$\underset{1}{d}a^i = -L^i_{pm} a^p\, dx^m, \qquad \underset{2}{d}a^i = -L^i_{mp} a^p\, dx^m.$$

Следуя Франка Грайф [**4**], можно получить следующую геометрическую интерпретацию двух родов параллельного переноса и кручения в L_N. Рассмотрим в L_N поверхностный элемент определенный двумя инфинитезимальними векторами dx^i, δx^i с началом в $P(x^i)$. Концы этих векторов $Q(x^i + dx^i)$, $R(x^i + \delta x^i)$.

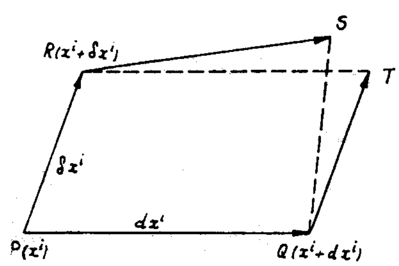

Рис. 1.

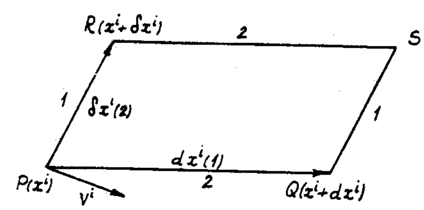

Рис. 2.

Если осуществить параллельный перенос того же рода, например первого, вектора dx^i вдоль δx^i и δx^i вдоль dx^i, для концов получаем разные точки S, T:

(17a) $$\underset{S}{x}^i = x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i,$$

(17b) $$\underset{T}{x}^i = x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i.$$

На основе (16) имеем

(18a,b) $$\underset{1}{\delta} dx^i = -L^i_{pm}\, dx^p \delta x^m, \qquad \underset{1}{d}\delta x^i = -L^i_{pm}\, \delta x^p dx^m$$

и получается

(19) $$\underset{T}{x}^i - \underset{S}{x}^i = \underset{1}{d}\delta x^i - \underset{1}{\delta} dx^i = 2L^i_{\underset{\smile}{pm}}\, dx^p \delta x^m,$$

т.е. для $L^i_{\underset{\smile}{jk}} \neq 0$ получаем $\underset{T}{x}^i \neq \underset{S}{x}^i$. Аналогично получается для переноса второго рода. Но, если векторы dx^i, δx^i исполняют перенос разных родов, тогда получается отождествление точек S и T. Можно смотреть на параллельный перенос 1-го рода как на перенос по одной стороне поверхностного элемента (положительной), а на перенос 2-го рода как на перенос по другой стороне (отрицательной). Пусть контур $PQSR$ получен переносся dx^i переносом первого рода вдоль δx^i и δx^i переносом второго рода вдоль dx^i. Это на рис. 2 обозначено: $dx^i(1)$, $dx^i(2)$.

Используя один (точнее первый) род параллельного переноса векторов, Франка Грайф [**5**] получила выражение для приращения Δv^i вектора v^i при обходе целого наблюдаемого контура, выражая его через $\underset{1}{R}$:

$$\underset{1}{\Delta} v^i = \underset{1}{R}{}^i{}_{jmn} v^j \, dx^m \delta x^n. \tag{20}$$

Таким образом получается геометрическая интерпретация для $\underset{1}{R}$.

Используя второй род переноса, получается

$$\underset{2}{\Delta} v^i = \underset{2}{R}{}^i{}_{jmn} v^j \, dx^m \delta x^n. \tag{21}$$

М. Прванович [**7**] использует параллельный перенос вектора v^i первого рода вдоль сторон PR и QS, а второго рода вдоль PQ и RS и получает (рис. 2):

$$\underset{3}{\Delta} v^i = -\underset{3}{R}{}^i{}_{jnm} v^j \, dx^m \delta x^n, \tag{22}$$

а меняя род переноса вдоль всех сторон получает

$$\underset{4}{\Delta} v^i = \underset{4}{R}{}^i{}_{jmn} v^j \, dx^m \delta x^n. \tag{23}$$

Так мы получаем идею систематически исследовать всех случаев которые появляются когда меняется род параллельного перенесения вектора v^i вдоль сторон контура $PQRS$. Есть всего $2^4 = 16$ случаев (4 стороны, 2 рода переноса) которые показываем на таблице:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
PQ	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
QS	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
RS	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	2
PR	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1

О первых четырех случаев уже говорили. В пятом случае имеем следующее.

Если вектор v^i переносится параллельного вдоль контура PQS, он в точке S имеет значение

$$v^i(s) = v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{QS}{\delta}(v^i + \underset{1}{d} v^i),$$

с приращением

$$Dv^i = \underset{1}{d} v^i + \underset{1}{\delta} v^i + \underset{QS}{\delta} \underset{1}{d} v^i. \tag{24}$$

Аналогично, вдоль контура PRS имеем

$$\overline{D} v^i = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}(v^i + \underset{2}{\delta} v^i) = \underset{2}{\delta} v^i + \underset{1}{d} v^i + \underset{RS}{d} \underset{2}{\delta} v^i. \tag{25}$$

От $(24, 25)$ для приращения вдоль $PRSQP$ имеем

$$\underset{5}{\Delta} v^i = \overline{D}v^i - Dv^i = \underset{2}{\delta} v^i - \underset{1}{\delta} v^i + \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i - \underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i. \tag{26}$$

На основе (16):

$$\underset{2}{\delta} v^i - \underset{1}{\delta} v^i = -L^i_{mp} v^p\, \delta x^m + L^i_{pm} v^p\, \delta x^m = 2L^i_{\underset{\smile}{pm}} v^p\, \delta x^m \tag{27}$$

и тоже

$$\begin{aligned} \underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i &= \underset{RS}{d}\left(-L^i_{mp} v^p\, \delta x^m\right) \\ &= -L^i_{mp,n}\, dx^n v^p\, \delta x^m - L^i_{mp} \underset{1}{d} v^p\, \delta x^m - L^i_{mp} v^p \underset{2}{d}\, \delta x^m \\ &= -L^i_{mp,n} v^p\, dx^n \delta x^m + L^i_{mp} L^p_{sn} v^s\, dx^n \delta x^m + L^i_{mp} L^m_{ns} v^p\, \delta x^s dx^n, \end{aligned}$$

т.е.

$$\underset{RS}{d}\,\underset{2}{\delta} v^i = (-L^i_{np,m} + L^s_{pm} L^i_{ns} + L^s_{mn} L^i_{sp}) v^p\, dx^m \delta x^n. \tag{28}$$

Тем же способом получаем

$$\underset{QS}{\delta}\,\underset{1}{d} v^i = (-L^i_{pm,n} + L^s_{pn} L^i_{sm} + L^s_{mn} L^i_{ps}) v^p\, dx^m \delta x^n. \tag{29}$$

На основе (26)–(29) имеем

$$\underset{5}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j\, \delta x^m + (\underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{pj}}) v^j\, dx^m \delta x^n. \tag{30}$$

Тем же способом в остальных случаях получается

$$\underset{6}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j\, dx^m + \underset{8}{A}{}^i{}_{jmn} v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{31}$$

$$\underset{7}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j (dx^m + \delta x^m) + (\underset{6}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{pj}}) v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{32}$$

$$\underset{8}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v^j \delta x^m - \underset{8}{A}{}^i{}_{jnm} v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{33}$$

$$\underset{9}{A} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j (dx^m - \delta x^n) + \underset{2}{A}{}^i{}_{jmn} v^j dx^m \delta x^n, \tag{34}$$

$$\underset{10}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j\, dx^m + (-\underset{12}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{pj}}) v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{35}$$

$$\underset{11}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v^j dx^m + (-\underset{10}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{jp}}) v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{36}$$

$$\underset{12}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j (\delta x^m - dx^m) + \underset{4}{A}{}^i{}_{jmn} v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{37}$$

$$\underset{13}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v^j \delta x^m - \underset{14}{A}{}^{i_{jnm}} v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{38}$$

$$\underset{14}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v^j (dx^m + \delta x^n) + (-\underset{6}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{jp}}) v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{39}$$

$$\underset{15}{\Delta} v^i = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v^j\, dx^m + \underset{14}{A}{}^i{}_{jmn} v^j\, dx^m \delta x^n, \tag{40}$$

где (см. [**2**])

$$\underset{2}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm}, \tag{41}$$

$$(42)\qquad \underset{4}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{jn}L^i_{mp},$$

$$(43)\qquad \underset{6}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj}L^i_{np} - L^p_{jn}L^i_{pm},$$

$$(44)\qquad \underset{8}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} - L^p_{jn}L^i_{pm},$$

$$(45)\qquad \underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{jn}L^i_{pm},$$

$$(46)\qquad \underset{12}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj}L^i_{pn} - L^p_{nj}L^i_{mp},$$

$$(47)\qquad \underset{14}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm}L^i_{np} - L^p_{nj}L^i_{mp},$$

псевдотензоры кривизны.

Можно сказать что например приращение $\underset{5}{\Delta}v^i$ получается как результат параллельного переноса вектора v^i вдоль рассматриваемого контура, если v^i переносится по отрицательной стороне элемента вдоль стороны PR, а по положительной стороне элемента вдоль остальных страниц. Так получаются геометрические интерпретации для тензоров $\underset{1}{R}$, $\underset{2}{R}$, $\underset{3}{R}$, $\underset{4}{R}$ и для псевдотензоров четного индекса (для некоторых несколько раз).

3. Чтобы получили геометрические интерпретации псевдотензоров кривизны нечетного индекса, рассмотрим параллельный перенос ковариантного вектора v_i вдоль того же контура как в §2.

Для ковариантного вектора v_i определяем два рода параллельного перенесения следующими уравнениями

$$(48\text{a,b})\qquad \underset{1}{d}v_i = L^p_{im}a_p\,dx^m, \qquad \underset{2}{d}v_i = L^p_{mi}a_p\,dx^m$$

и тем же способом как в §2 получаем приращения

$$(49)\qquad \underset{1}{\Delta}v_j = -\underset{1}{R}{}^i{}_{jmn}v_i\,dx^m\delta x^n,$$

$$(50)\qquad \underset{2}{\Delta}v_j = -\underset{2}{R}{}^i{}_{jmn}v_i\,dx^m\delta x^n,$$

$$(51)\qquad \underset{3}{\Delta}v_j = \underset{3}{R}{}^i{}_{jnm}v_i\,dx^m\delta x^n,$$

$$(52)\qquad \underset{4}{\Delta}v_j = -\underset{4}{R}{}^i{}_{jmn}v_i\,dx^m\delta x^n,$$

$$(53)\qquad \underset{5}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{mj}}v_i\delta x^m - (\underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn}L^i_{\underparen{pj}})v_i\,dx^m\delta x^n,$$

$$(54)\qquad \underset{6}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{mj}}v_i dx^m - \underset{7}{A}{}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n,$$

$$(55)\qquad \underset{7}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{mj}}v_i(dx^m + \delta x^m) - (\underset{5}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn}L^i_{\underparen{pj}})v_i dx^m\delta x^n,$$

$$(56)\qquad \underset{8}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{jm}}v_i\delta x^m + \underset{7}{A}{}^i{}_{jnm}v_i dx^m\delta x^n,$$

$$(57)\qquad \underset{9}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{mj}}v_i(dx^m - \delta x^m) - \underset{1}{A}{}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n,$$

$$(58)\qquad \underset{10}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{mj}}v_i dx^m + (\underset{11}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underparen{jp}})v_i dx^m\delta x^n$$

$$(59)\qquad \underset{11}{\Delta}v_j = 2L^i_{\underparen{jm}}v_i dx^m + (\underset{9}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn}L^i_{\underparen{pj}})v_i dx^m\delta x^n,$$

(60) $$\underset{12}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v_i(\delta x^m - dx^m) - \underset{3}{A}{}^i{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n,$$

(61) $$\underset{13}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\smile}{mj}} v_i dx^m + \underset{13}{A}{}^i{}_{jnm} v_i dx^m \delta x^n,$$

(62) $$\underset{14}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v_i(dx^m + \delta x^m) + (\underset{5}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{pj}}) v_i dx^m \delta x^n,$$

(63) $$\underset{15}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v_i dx^m - \underset{13}{A}{}^i{}_{jmn} v_i dx^m \delta x^n,$$

(64) $$\underset{16}{\Delta} v_j = 2L^i_{\underset{\smile}{jm}} v_i \delta x^m - (\underset{4}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{jp}}) v_i dx^m \delta x^n,$$

где $\underset{1}{A}$, $\underset{15}{A}$ псевдотензоры кривизны $(9, 10)$, а

(65) $$\underset{3}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm},$$
(66) $$\underset{5}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{mp},$$
(67) $$\underset{7}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{jn} L^i_{mp},$$
(68) $$\underset{9}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{jm,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{jm} L^i_{pn} - L^p_{nj} L^i_{pm},$$
(69) $$\underset{11}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{jn,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{jn} L^i_{mp},$$
(70) $$\underset{13}{A}{}^i{}_{jmn} = L^i_{mj,n} - L^i_{nj,m} + L^p_{mj} L^i_{np} - L^p_{nj} L^i_{pm}$$

также псевдотензоры кривизны [**2**]. Чтобы получить геометрическую интерпретацию псевдотензора кривизны $\underset{15}{A}$, заметим что на основе (8) имеем

(71) $$\underset{3}{R}{}^i{}_{jmn} = \underset{15}{A}{}^i{}_{jmn} + 2L^p_{nm} L^i_{\underset{\smile}{pj}}$$

и (51) можно написать в форме

(72) $$\underset{3}{\Delta} v_j = (\underset{15}{A}{}^i{}_{jnm} + 2L^p_{mn} L^i_{\underset{\smile}{pj}}) v_i dx^m \delta x^n.$$

4. В работе [**6**] мы получили тензоры $\underset{1}{\widetilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\widetilde{R}}$, как некоторые линейные комбинации псевдотензоров кривизны. Эти тензоры в упомянутой работе мы назвали "выведенными" тензорами кривизны пространства несимметричной аффинной связности. Так имеем:

(73) $$\underset{1}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{1}{A} + \underset{3}{A})^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{2}{A} + \underset{4}{A})^i{}_{jmn},$$
(74) $$\underset{2}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{7}{A} + \underset{13}{A})^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{9}{A} + \underset{11}{A})^i{}_{jmn},$$
(75) $$\underset{3}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{8}{A} + \underset{14}{A})^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{2}(\underset{9}{A} + \underset{11}{A})^i{}_{jmn},$$
(76) $$\underset{4}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = \tfrac{1}{3}(\underset{3}{R} + \underset{11}{A} + \underset{13}{A})^i{}_{j\underset{\smile}{mn}} = \tfrac{1}{3}(\underset{3}{R} + \underset{12}{A} + \underset{14}{A})^i{}_{j\underset{\smile}{mn}},$$
(77) $$\underset{5}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{1}{A} - \underset{7}{A})^i{}_{jmn} - \underset{13}{A}{}^i_{jnm} = -\underset{7}{A}{}^i_{jmn} - (\underset{11}{A} + \underset{15}{A})^i{}_{jnm},$$
(78) $$\underset{6}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{2}{A} - \underset{8}{A})^i{}_{jmn} - \underset{14}{A}{}^i{}_{jnm} = -\underset{8}{A}{}^i{}_{jmn} - (\underset{12}{A} + \underset{15}{A})^i{}_{jnm},$$
(79) $$\underset{7}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{3}{A} + \underset{7}{A})^i{}_{jmn} - \underset{13}{A}{}^i{}_{jnm} = \underset{9}{A}{}^i{}_{jnm} + (\underset{13}{A} - \underset{15}{A})^i{}_{jnm},$$
(80) $$\underset{8}{\widetilde{R}}{}^i{}_{jmn} = (\underset{4}{A} + \underset{8}{A})^i{}_{jmn} + \underset{14}{A}{}^i{}_{jnm} = \underset{10}{A}{}^i{}_{jmn} + (\underset{14}{A} - \underset{15}{A})^i{}_{jnm},$$

где например $(\underset{1}{A}+\underset{3}{A})^i{}_{jmn} = \underset{1}{A}^i{}_{jmn}+\underset{3}{A}^i{}_{jmn}$ и аналогично в других случаях.

На основе $(34, 37)$ получается

$$\underset{9}{\Delta}v^i + \underset{12}{\Delta}v^i = (\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})v^i = (\underset{2}{A}+\underset{4}{A})^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

т.е., используя (73):

81a $$(\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})v^i = 2\underset{1}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n.$$

Можно сказать: Если вектор v^i переносится параллельно и два раза обходит вышеупомянутый контур, первый раз как в 9-ом, а второй раз как в 12-ом случаях, полное приращение есть (81a). Также имеем

(81b) $$(\underset{9}{\Delta}+\underset{12}{\Delta})v_j = -2\underset{1}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n.$$

Тем же способом получаются геометрические интерпретации и остальных тензоров кривизны $\underset{2}{\widetilde{R}}, \ldots, \underset{8}{\widetilde{R}}$:

(82a) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})v_j = -2\underset{2}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n,$$

(82b) $$(\underset{8}{\Delta}+\underset{13}{\Delta})v_j = 2\underset{2}{\widetilde{R}}^i{}_{jnm}v_i dx^m\delta x^n,$$

(82c) $$(\underset{10}{\Delta}+\underset{11}{\Delta})v_j = 2\underset{2}{\widetilde{R}}^i{}_{jnm}v_i dx^m\delta x^n,$$

(83a) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{15}{\Delta})v^i = 2\underset{3}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

(83b) $$(\underset{5}{\Delta}+\underset{16}{\Delta})v^i = 2\underset{3}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

(84) $$(\underset{9}{\Delta}+\underset{10}{\Delta}+\underset{12}{\Delta}+\underset{13}{\Delta}+\underset{15}{\Delta}+\underset{16}{\Delta})v_j = -2(3\underset{4}{R}^i{}_{jmn}+2L^p_{\underset{\smile}{mn}}L^i_{\underset{\smile}{pj}})v_i dx^m\delta x^n,$$

(85) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{9}{\Delta}+\underset{13}{\Delta})v_j = \underset{5}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n,$$

(86) $$(\underset{9}{\Delta}+\underset{13}{\Delta}-\underset{6}{\Delta})v^i = \underset{6}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n,$$

(87) $$(\underset{13}{\Delta}-\underset{6}{\Delta}-\underset{12}{\Delta})v_j = \underset{7}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v_i dx^m\delta x^n,$$

(88) $$(\underset{6}{\Delta}+\underset{12}{\Delta}-\underset{13}{\Delta})v^i = \underset{8}{\widetilde{R}}^i{}_{jmn}v^j dx^m\delta x^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Москва, 1967.

[**2**] S. Minčić, *Ricci identities in the space of non-symmetric affine connexion*, Mat. Vesnik **10** (**25**) (1973), 161–172.

[**3**] S. Minčić, *New commutation formulas in the non-symmetric affine connexion space*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (NS) **22** (**36**) (1977), 189–199.

[**4**] F. Graiff, *Sulla possibilità di costruire parallelogrami chiusi in alcune varietà a torsione*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. III, **7** (1952), 132–135.

[**5**] F. Graiff, *Formule di comutazione e trasporto ciclico nei recenti spazi di Einstein*, Rend. Ist. Lombardo Sci. e Letere, Cl. sci. mat. e natur., Milano **87**, No. 1 (1954), 105–110.

[**6**] S. Minčić, *Curvature tensors of the space of non-symmetric affine connexion, obtained from the curvature pseudotensors*, Mat. Vesnik **13** (**28**) (1976), 421–435.

[**7**] М. Прванович, *Четыре тензора кривизны несимметрической связности*, В: *150 лет геометрии Лобачевского*, Казань 30 июня – 2 июля 1976, Москва, 1977.

Катедра за математику
Филозофски факултет
18000 Ниш, Југославија

(Поступила 03 08 1989)