

SUR LA CONVERGENCE DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE AVEC DES SOLUTIONS IRRÉGULIÈRES

Boško Jovanović

Résumé. Dans cet article on considère des schémas aux différences finies pour des équations elliptiques du quatrième ordre dont les solutions appartiennent aux espaces de Sobolev. Les estimations de l'ordre de convergence sont obtenues supposant la régularité minimale des coefficients.

1. Introduction

La convergence des schémas aux différences finies est analysé habituellement en supposant que la solution du problème considéré est suffisamment régulière. Une technique nouvelle, usant les opérateurs avérage et le lemme de Bramble-Hilbert, a donné la possibilité de construire des schémas convergents pour les problèmes avec des solutions appartenant aux espaces de Sobolev W_p^s . Les schémas aux différences finies pour des équations elliptiques de deuxième ordre avec des coefficients constants ont été considérés dans [8] (pour $p = 2$) et [11] (pour $p \neq 2$). Les équations avec des coefficients variables sont analysées dans [6], [7]. Dans [4], [5] on examine des problèmes du quatrième ordre.

Dans cet article on analyse la convergence des schémas aux différences finies pour des équations linéaires elliptiques du quatrième ordre avec des coefficients variables. On considère le problème avec des conditions naturelles aux limites, et le problème de Dirichlet. Les estimations de l'ordre de la convergence compatibles avec la régularité des données sont obtenues. Un problème pareil a été considéré dans [4], mais les résultats obtenus là-bas ne sont pas optimaux.

AMS Subject Classification (1980): Primary 65 N 10

Rad je finansirala Zajednica nauke SR Srbije

2. Le problème aux limites et le schéma aux différences finies correspondant

Soit $\Omega = (0, 1)^2$ le carré unitaire dans \mathbf{R}^2 et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Nous usons également les désignations suivantes:

$$\begin{aligned}\Gamma_{-i} &= \{x \in \Gamma : x_i = 0, 0 < x_{3-i} < 1\}, \\ \Gamma_{+i} &= \{x \in \Gamma : x_i = 1, 0 < x_{3-i} < 1\}, \\ A &= A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}, \\ A_{jk} &= \{(j, k)\} \quad (i = 1, 2; j, k = 0, 1).\end{aligned}$$

Nous considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{aligned}(1) \quad Lu &\equiv D_1^2 M_1(u) + 2D_1 D_2 M_3(u) + D_2^2 M_2(u) = f(x), \quad x \in \Omega \\ M_i(u) &= 0, \quad D_i M_i(u) + 2D_{3-i} M_3(u) = 0, \quad x \in \Gamma_{\pm i}, \quad i = 1, 2 \\ M_3(u) &= 0, \quad x \in A \\ u(0, 0) &= c_{00}, \quad u(0, 1) = c_{01}, \quad u(1, 0) = c_{10}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}M_1(u) &= a_1 D_1^2 u + a_0 D_2^2 u, \quad M_2(u) = a_0 D_1^2 u + a_2 D_2^2 u, \\ M_3(u) &= a_3 D_1 D_2 u \quad \text{et} \quad D_i u = \partial u / \partial x_i.\end{aligned}$$

Nous supposons que les conditions suivants sont vérifiées;

$$\begin{aligned}(2) \quad a_i &\geq c_0 > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad a_1 a_2 - a_0^2 \geq c_1 > 0, \quad x \in \Omega \\ u &\in W_2^s(\Omega), \quad f \in W_2^{s-4}(\Omega), \quad 2 < s \leq 4.\end{aligned}$$

Alors, les coefficients a_i appartiendront à l'espace de multiplicateurs $M(W_2^{s-2}(\Omega))$ [9]. Les conditions suffisantes sont:

$$(3) \quad a_i \in W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

où

$$\begin{aligned}p = 2, \quad \varepsilon = 0, & \quad \text{pour } 3 < s \leq 4 \\ p > 2, \quad \varepsilon = 0, & \quad \text{pour } s = 3 \\ p \geq 2/(s-2), \quad \varepsilon > 0 \text{ — arbitraire,} & \quad \text{pour } 2 < s < 3.\end{aligned}$$

Dans le domaine $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ nous introduisons un réseau uniforme $\bar{\omega}$ avec le pas $h = 1/N$. Nous usons les désignations suivantes:

$$\begin{aligned}\omega &= \bar{\omega} \cap \Omega, \quad \gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma, \quad \gamma_{\pm i} = \gamma \cap \Gamma_{\pm i}, \quad \bar{\gamma}_{\pm i} = \gamma \cap \bar{\Gamma}_{\pm i}, \\ \gamma^i &= \gamma \setminus (\bar{\gamma}_{-i} \cup \gamma_{+i}), \quad \omega^i = \omega \cup \gamma_{+i} \quad \text{et} \quad \omega^+ = \omega \cup \gamma_{+1} \cup \gamma_{+2} \cup A_{11}\end{aligned}$$

Nous introduisons aussi des nœuds extérieurs dans $[-2h, 1 + 2h]^2$.

Pour une fonction discrète nous usons la désignation suivante:

$$v^{\pm i} = v^{\pm i}(x) = v(x \pm hr_i), \quad i = 1, 2,$$

où $r_1 = (1, 0)$ et $r_2 = (0, 1)$.

Les opérateurs des différences finies seront définis de manière habituelle:

$$v_{x_i} = (v^{+i} - v)/h, \quad v_{\bar{x}_i} = (v - v^{-i})/h, \quad v_{\bar{x}_i} = 0.5(v_{x_i} + v_{\bar{x}_i}), \quad i = 1, 2.$$

Nous introduisons aussi les opérateurs avéragé de Steklov:

$$T_i^+ f(x) = \int_0^1 f(x + thr_i) dt = T_i^- f(x + hr_i) = T_i f(x + 0.5hr_i).$$

Ces opérateurs commutent et transforment les dérivées en différences finies:

$$T_i^+ D_i f = f_{x_i}, \quad T_i^- D_i f = f_{\bar{x}_i}.$$

Notons que

$$T_i^+ T_i^- f = T_i^2 f = \int_{-1}^1 (1 - |t|) f(x + thr_i) dt.$$

Définissons aussi les opérateurs asymétriques:

$$T_{i\pm}^2 f(x) = 2 \int_0^1 (1 - t) f(x \pm thr_i) dt, \quad i = 1, 2.$$

Pour l'approximation du problème (1) nous introduisons le schéma aux différences finies suivant:

$$(4) \quad \begin{aligned} L_h v &\equiv m_1(v)_{x_1 \bar{x}_1} + 2m_3(v)_{x_1 x_2} + m_2(v)_{x_2 \bar{x}_2} = Tf, \quad x \in \bar{\omega} \\ m_i(v) &= 0, \quad m_i(v)_{\bar{x}_i} + [m_3(v) + m_3(v)^{+i}]_{x_{3-i}} = 0, \quad x \in \bar{\gamma}_{\pm i} \\ m_3(v) &+ m_3(v)^{+1} + m_3(v)^{+2} + m_3(v)^{+1,+2} = 0, \quad x \in A \\ v(0, 0) &= c_{00}, \quad v(0, 1) = c_{01}, \quad v(1, 0) = c_{10} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} m_1(v) &= a_1 v_{x_1 \bar{x}_1} + a_0 v_{x_2 \bar{x}_2}, \quad m_2(v) = a_0 v_{x_1 \bar{x}_1} + a_2 v_{x_2 \bar{x}_2} \\ m_3(v) &= \tilde{a}_3 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, \quad \tilde{a}_3(x) = a_3(x_1 - 0.5h, x_2 - 0.5h) \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$Tf = \begin{cases} T_1^2 T_2^2 f, & x \in \omega \\ T_{1+}^2 T_2^2 f, & x \in \gamma_{-1} \\ T_{1+}^2 T_{2+}^2 f, & x \in A_{00} \\ \text{etc.,} & \end{cases}$$

Définissons les produits scalaires:

$$\begin{aligned}(v, w) &= h^2 \sum_{x \in \omega} vw + 0.5h^2 \sum_{x \in \gamma \setminus A} vw + 0.25h^2 \sum_{x \in A} vw, \\ (v, w]_i &= h^2 \sum_{x \in \omega^i} vw + 0.5h^2 \sum_{x \in \gamma^i} vw, \\ (v, w] &= h^2 \sum_{x \in \omega^+} vw\end{aligned}$$

et les normes correspondantes:

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad \|v\|_i = (v, v]_i^{1/2}, \quad \|v\| = (v, v]^{1/2}.$$

Définissons enfin la seminorme:

$$|v|_{W_2^2(\omega)}^2 = \|v_{x_1 \bar{x}_1}\|^2 + \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|^2 + \|v_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}\|^2$$

et la norme:

$$\|v\|_{W_2^2(\omega)}^2 = \|v\|^2 + \|v_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_2^2 + |v|_{W_2^2(\omega)}^2.$$

LEMME 1. *Les normes* $\|v\|_{W_2^2(\omega)}$ *et*

$$\|v\|'_{W_2^2(\omega)} = \left[v^2(0, 0) + v^2(0, 1) + v^2(1, 0) + |v|_{W_2^2(\omega)}^2 \right]^{1/2}$$

sont équivalentes.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}v(ih, jh) &= h^3 \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l}^{k-1} v_{x_1 \bar{x}_1}(mh, jh) - h^3 \sum_{k=1}^i \sum_{l=k+1}^N \sum_{m=k}^{l-1} v_{x_1 \bar{x}_1}(mh, jh) \\ &+ h^3 \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l}^{k-1} v_{x_2 \bar{x}_2}(ih, mh) - h^3 \sum_{k=1}^j \sum_{l=k+1}^N \sum_{m=k}^{l-1} v_{x_2 \bar{x}_2}(ih, mh) \\ &- h^2 \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(kh, lh) + ih^3 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^j v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(kh, lh) + jh^3 \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^N v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(kh, lh) \\ &+ v(0, 0) + ih[v(1, 0) - v(0, 0)] + jh[v(0, 1) - v(0, 0)] \quad \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{\bar{x}_1}(ih, jh) &= h^2 \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=k}^{i-1} v_{x_1 \bar{x}_1}(lh, jh) - h^2 \sum_{k=i+1}^N \sum_{l=i}^{k-1} v_{x_1 \bar{x}_1}(lh, jh) \\ &+ h^2 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^j v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(kh, lh) + v(1, 0) - v(0, 0)\end{aligned}$$

($v_{\bar{x}_2}$ on représente analogiquement) d'où le lemme. (Voir [2] pour le cas continu).

□

Supposons que la solution u et les coefficients a_i du problème (1) sont prolongés preservant la classe dans le domaine $(-d, 1+d)^2$, où $d > 2h$. L'erreur $z = u - v$ satisfait aux conditions:

$$\begin{aligned}
 L_h z &= \psi, \quad x \in \bar{\omega}, \quad m_i(z) = \eta_i, \quad x \in \gamma_{\pm i} \quad i = 1, 2 \\
 & \quad m_i(z)_{\hat{x}_i} + [m_3(z) + m_3(z)^{+i}]_{x_{3-i}} = \\
 (5) \quad & = m_i(u)_{\hat{x}_i} + [m_3(u) + m_3(u)^{+i}]_{x_{3-i}}, \quad x \in \bar{\gamma}_{\pm i}, \quad i = 1, 2 \\
 & \quad m_3(z) + m_3(z)^{+1} + m_3(z)^{+2} + m_3(z)^{+1,+2} = \\
 & = m_3(u) + m_3(u)^{+1} + m_3(u)^{+2} + m_3(u)^{+1,+2}, \quad x \in A \\
 & \quad z(0, 0) = z(0, 1) = z(1, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

où

$$\eta_i = m_i(u) - T_{3-i}^2 M_i(u), \quad i = 1, 2, \quad \eta_3 = m_3(u) - T_1^- T_2^- M_3(u)$$

et

$$\begin{aligned}
 \psi &= \eta_{1, x_1 \bar{x}_1} + 2\eta_{3, x_1 x_2} + \eta_{2, x_2 \bar{x}_2}, \quad x \in \omega, \\
 \psi &= [m_1(u)_{\bar{x}_1} - 2h^{-1} T_2^2 M_1(u)]_{x_1} + \\
 & \quad + 2 [m_3(u)_{x_1} - 2h^{-1} T_1^+ T_2^- M_3(u)]_{x_2} + \\
 & \quad + [m_2(u) - T_{1+}^2 M_2(u)]_{x_2 \bar{x}_2}, \quad x \in \gamma_{-1} \\
 \psi &= [m_1(u)_{\bar{x}_1} - 2h^{-1} T_{2+}^2 M_1(u)]_{x_1} \\
 & \quad + 2 [m_3(u)_{x_1 x_2} - 4h^{-2} T_1^+ T_2^+ M_3(u)] \\
 & \quad + [m_2(u)_{\bar{x}_2} - 2h^{-1} T_{1+}^2 M_2(u)]_{x_2}, \quad x \in A_{00}
 \end{aligned}$$

etc. Posons aussi:

$$\zeta_i = \begin{cases} T_{3-i}^2 M_i(u) - T_{(3-i)\pm} M_i(u), & x \in \bar{\gamma}_{\mp(3-i)} \\ 0, & \text{dans les autres nœuds.} \end{cases}$$

En utilisant la sommation partielle, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme 1 on vérifie facilement la proposition suivante:

LEMME 2. *Pour le schéma aux différences finies (5) l'estimation a priori:*

$$(6) \quad \|z\|_{W_2^2(\omega)}^2 \leq C (\|\eta_1\|^2 + \|\eta_2\|^2 + \|\eta_3\|)^2 + \|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_2\|^2$$

est vérifié.

L'estimation de l'ordre de la convergence

L'estimation de l'ordre de la convergence du schéma (4) se fonde sur les deux lemmes suivants. Ils représentent les généralisations du résultat bien connu de Bramble-Hilbert [1]

LEMME 3, [4]. *Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert avec la frontière continue au sens de Lipschitz et $\varphi(u)$ une fonctionnelle linéaire bornée sur $W_p^s(E)$ telle que $\varphi(u) = 0$*

pour les polynômes du degré $\leq [s]^-$ ($[s]^-$ — le plus grand entier $< s$). Alors, il existe une constante positive $C = C(E, s, p)$ telle que:

$$|\varphi(u)| \leq C|u|_{W_p^s(E)}, \quad \forall u \in W_p^s(E).$$

LEMME 4, ([2], [7]). Soient $E \subset \mathbf{R}^n$ et $G \subset \mathbf{R}^m$ deux ouverts avec des frontières continues au sens de Lipschitz et $\chi(u, v)$ une fonctionnelle bilinéaire bornée sur $W_p^s(E) \times W_q^r(G)$ telle que $\chi(u, v) = 0$ si u est un polynôme du degré $\leq [s]^-$, ou si v est un polynôme du degré $\leq [r]^-$. Alors, il existe une constante positive $C = C(E, s, p, G, r, q)$ telle que:

$$|\chi(u, v)| \leq C|u|_{W_p^s(E)}|v|_{W_q^r(G)}, \quad \forall u \in W_p^s(E), \quad \forall v \in W_q^r(G).$$

THÉORÈME. Si la solution et les coefficients du problème (1) satisfont aux conditions (2) et (3), alors le schéma aux différences finies (4) converge, et l'estimation

$$(7) \quad \|u - v\|_{W_2^2(\omega)} \leq Ch^{\min\{s-2, 1.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \\ \times \max_i \|a_i\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \leq 4.$$

est accomplie.

Démonstration. Pour obtenir l'estimation d'ordre de convergence du notre schéma (4) il faut estimer les termes du côté droit de l'inégalité (6). Présentons d'abord η_1 de la façon suivante: $\eta_1 = \sum_{j=1}^8 \eta_{1j}$, où:

$$\begin{aligned} \eta_{1k} &= a_{2-k} (u_{x_k \bar{x}_k} - T_1^2 T_2^2 D_k^2 u), \\ \eta_{1,k+2} &= (a_{2-k} - T_1^2 T_2^2 a_{2-k}) (T_1^2 T_2^2 D_k^2 u), \\ \eta_{1,k+4} &= (T_1^2 T_2^2 a_{2-k}) (T_1^2 T_2^2 D_k^2 u) - T_1^2 T_2^2 (a_{2-k} D_k^2 u), \\ \eta_{1,k+6} &= T_1^2 T_2^2 (a_{2-k} D_k^2 u) - T_2^2 (a_{2-k} D_k^2 u), \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

η_2 est représenté analogiquement. Aussi: $\eta_3 = \eta_{31} + \eta_{32}$, où:

$$\eta_{31} = (\tilde{a}_3 - T_1^- T_2^- a_3) u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \quad \text{et} \quad \eta_{32} = (T_1^- T_2^- a_3) u_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - T_1^- T_2^- (a_3 D_1 D_2 u).$$

Prenons $e = e(x) = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h)$. Pour $s \geq 2$ la valeur $\eta_{11}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, est une fonctionnelle linéaire bornée de $u \in W_2^s(e)$:

$$|\eta_{11}| \leq C(h) \|a_1\|_{L_\infty(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(e)}.$$

En outre, $\eta_{11} = 0$ si u est un polynôme du degré ≤ 3 . En utilisant le lemme 3 on obtient:

$$|\eta_{11}| \leq Ch^{s-3} \|a_1\|_{L_\infty(\Omega)} |u|_{W_2^s(e)} \quad \text{pour } 2 \leq s \leq 4.$$

D'ici, en utilisant l'inclusion [12]:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} \subset L_\infty \quad \text{pour } s > 2$$

et la sommation, on obtient:

$$(8) \quad \|\eta_{11}\| \leq Ch^{s-2} \|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

De la même façon on estime η_{12} .

La valeur $\eta_{13}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, est une fonctionnelle bilinéaire bornée de $(a_1, u) \in W_p^\lambda(e) \times W_q^2(e)$ où $\lambda p > 2$, $q = \infty$ pour $p = 2$ et $q = 2p/(p-2)$ pour $p > 2$. En outre, $\eta_{13} = 0$ si a_1 est un polynôme de degré ≤ 1 ou si u est un polynôme de degré ≤ 1 . En utilisant le lemme 4 on obtient:

$$|\eta_{13}| \leq Ch^{\lambda-1} |a_1|_{W_p^\lambda(e)} |u|_{W_q^2(e)}, \quad 2/p < \lambda \leq 2$$

d'où par la sommation:

$$\|\eta_{13}\| \leq Ch^\lambda \|a_1\|_{W_p^\lambda(\Omega)} \|u\|_{W_q^2(\Omega)}.$$

En prenant $\lambda = s - 2 + \varepsilon$ et en utilisant les inclusions [12]: $W_2^s \subset W_\infty^2$, pour $s > 3$ et $W_2^s \subset W_{2p/(p-2)}^2$, pour $2 < s \leq 3$, on obtient:

$$(9) \quad \|\eta_{13}\| \leq Ch^{s-2} \|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

De la même façon on estime η_{14} et η_{31} .

Pour $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 2$ et $q > 2$ la valeur $\eta_{15}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, représente une fonctionnelle bilinéaire bornée de $(a_1, u) \in W_q^\lambda(e) \times W_{2q/(q-2)}^\mu(e)$. En plus, $\eta_{15} = 0$ si $a_1 = \text{const}$, ou si u est un polynôme du degré ≤ 2 . En utilisant le lemme 4 on obtient:

$$\|\eta_{15}\| \leq Ch^{\lambda+\mu-2} \|a_1\|_{W_q^\lambda(\Omega)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^\mu(\Omega)},$$

où $0 \leq \lambda \leq 1$ et $2 \leq \mu \leq 3$. Prenons $\lambda + \mu = s$. Pour $\lambda + \mu > 3$ on peut choisir $q = q(\lambda, \mu)$ tel que $\lambda \geq 2/q \geq 3 - \mu$. Alors, on a:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} = W_2^{\lambda+\mu-2} \subset W_q^\lambda \quad \text{et} \quad W_2^s = W_2^{\lambda+\mu} \subset W_{2q/(q-2)}^\mu.$$

Analogiquement, pour $2 < \lambda + \mu \leq 3$ on peut choisir q telle que $\lambda \geq 2/q \geq 2/p - (\mu - 2)$. Dans ce cas on a:

$$W_p^{s-2+\varepsilon} = W_2^{\lambda+\mu-2+\varepsilon} \subset W_q^\lambda \quad \text{et} \quad W_2^s = W_2^{\lambda+\mu} \subset W_{2q/(q-2)}^\mu.$$

En utilisant ces inclusions on obtient:

$$(10) \quad \|\eta_{15}\| \leq Ch^{s-2} \|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

De la même manière on estime η_{16} et η_{32} .

Pour $\lambda > 0.5$ la valeur $\eta_{17}(x)$, $x \in \bar{\omega}$, set une fonctionnelle linéaire bornée de $a_1 D_1^2 u \in W_2^\lambda(e)$, qui s'annule sur les polynômes du degré ≤ 1 . D'après le lemme 3 on obtient:

$$\|\eta_{17}\| \leq Ch^\lambda |a_1 D_1^2 u|_{W_2^\lambda(\Omega)}, \quad 0.5 < \lambda \leq 2.$$

Utilisant l'inégalité évidente:

$$(11) \quad \|a_1 D_1^2 u\|_{W_2^\lambda(\Omega)} \leq C \|a_1\|_{W_p^{\lambda+\varepsilon}(\Omega)} \|D_1^2 u\|_{W_2^\lambda(\Omega)},$$

on obtient, en prenant $\lambda = s - 2$:

$$(12) \quad \|\eta_{17}\| \leq C h^{s-2} \|a_1\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \leq 4.$$

De la même façon on estime η_{18} .

Pour $\lambda > 0.5$, la valeur $\zeta_i(x)$, $x \in \bar{\omega}$, est une fonctionnelle linéaire bornée de $M_i(u) \in W_2^\lambda(\varepsilon)$, qui s'annule sur les constantes. En utilisant le lemme 3 on obtient:

$$\|\zeta_i\| \leq C h^\lambda \left(|M_i(u)|_{W_2^\lambda(\Omega_{i-})} + |M_i(u)|_{W_2^\lambda(\Omega_{i+})} \right), \quad 0.5 < \lambda \leq 1$$

où $\Omega_{i-} = \{x : -h < x_i < 1+h, -h < x_{3-i} < h\}$ et $\Omega_{i+} = \{x : -h < x_i < 1+h, 1-h < x_{3-i} < 1+h\}$. En utilisant l'inégalité [10]:

$$(13) \quad \|g\|_{L_2(\Omega_{i\pm})} \leq C h^{\min\{\mu, 0.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(\mu-0.5)|} \|g\|_{W_2^\mu(\Omega)}, \quad 0 < \mu \leq 1$$

et (11) on obtient:

$$(14) \quad \|\zeta_i\| \leq C h^{\min\{s-2, 1.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \times \max_j \|a_j\|_{W_p^{s-2+\varepsilon}(\Omega)} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2.5 < s \leq 4.$$

Finalement, de (8–11) et (6) on obtient l'estimation demandée (7). \square

Remarque. On peut obtenir des estimations pareilles dans d'autres normes de Sobolev discrètes. Pour l'équation biharmonique des estimations semblables sont obtenues dans [5].

4. Problème de Dirichlet

Considérons, finalement, le problème de Dirichlet pour notre équation:

$$(15) \quad \begin{aligned} Lu &= f, & x &\in \Omega \\ u &= 0, & x &\in \Gamma; \quad D_i u = 0, & x &\in \Gamma_{\pm i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

En retenant la notation précédente substituons le problème (15) par le problème discret:

$$(16) \quad \begin{aligned} L_h v &= T_1^2 T_2^2 f, & x &\in \omega \\ v &= 0, & x &\in \gamma; \quad v_{\hat{x}_i} = 0, & x &\in \gamma_{\pm i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'erreur $z = u - v$ satisfait aux conditions:

$$\begin{aligned} L_h z &= \eta_{1, x_1 \bar{x}_1} + 2\eta_{3, x_1 x_2} + \eta_{2, x_2 \bar{x}_2}, & x &\in \omega, \\ z &= 0, & x &\in \gamma; \quad z_{\hat{x}_i} = h\xi_i, & x &\in \gamma_{\pm i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{où } \xi_i = \begin{cases} (u_{\hat{x}_i} - D_i u)/h, & x \in \gamma_{\pm i} \\ 0, & \text{dans les autres nœuds.} \end{cases}$$

L'estimation a priori:

$$(17) \quad \|z\|_{W_2^2(\omega)}^2 \leq C \left(\|\eta_1\|^2 + \|\eta_2\|^2 + \|\eta_3\|^2 + \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 \right)$$

est accomplie.

La valeur $\xi_i(x)$, $x \in \bar{\omega}$, est une fonctionnelle linéaire bornée de $u \in W_2^\lambda(e)$, $\lambda > 2$, qui s'annule sur les polynômes du degré ≤ 2 . En utilisant le lemme 3 et l'inégalité (13) on obtient:

$$(18) \quad \|\xi_i\| \leq Ch^{\min\{s-2, 1.5\}} |\ln h|^{1-|\operatorname{sgn}(s-3.5)|} \|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Utilisant (17), (18) et les estimations précédentes pour η_1 , η_2 et η_3 nous pouvons conclure que le schéma aux différences finies (16) converge, en accord avec l'estimation (7).

RÉFÉRENCES

- [1] J. H. Bramble, S. R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16** (1971), 362–369.
- [2] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–463.
- [4] I. P. Gavriljuk, V. G. Prikazchikov, A. N. Himich, *L'erreur du schéma aux différences finies pour un problème elliptique du quatrième ordre avec des conditions mixtes aux limites*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **26** (1986), 1821–1830 (Russe).
- [5] L. D. Ivanović, B. S. Jovanović, E. E. Süli, *La convergence des schémas aux différences finies pour l'équation biharmonique*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **26** (1986), 776–780 (Russe).
- [6] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, E. E. Süli, *Convergence of a finite difference scheme for second order hyperbolic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 39–45.
- [7] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, E. E. Süli, *Convergence of finite difference schemes for elliptic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 301–305.
- [8] R. D. Lazarov, V. L. Makarov, W. Weinelt, *On the convergence of difference schemes for the approximation of the solutions $u \in W_2^m$ ($m > 0.5$) of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. **44** (1984), 223–232.
- [9] V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Multipliers in Spaces of Differentiable Functions*, Monographs and Studies in Mathematics **23**, Pitman, Boston, Massachusetts, 1985.
- [10] L. A. Oganessian, L. A. Ruhovec, *Méthodes variationnelles des différences finies pour la solution des équations elliptiques*, Ed. Acad. Sci. Arm. SSR, Erevan, 1979 (Russe).
- [11] E. E. Süli, B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*, Math. Comput. **45** (1985), 319–327.
- [12] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

Matematički fakultet
11000 Beograd
Yougoslavie

(Reçu le 06 10 1988)