PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 45 (59), 1989, pp. 195-201

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДНОГО ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В ГИЛЬБЕТРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Лиляна Петрушевски

Резюме. В этой работе доказано, что случайный процесс $\xi(t)$ со зачениями в сепарабельном гильбертовом пространстве, эквивалентен винеровскомы процщессу $W(t)$, на конечном интервале $[0,T]$ в случае когда

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

где $A(s)$ измеримая операторная функция ц интерируемой в квадрате следовой нормой на $[0,T]$.

1. Введение. Пусть $W = W(t)$, $t \geq 0$ стандартный виноровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве H и $\xi = \xi(t)$ решение стохастического интегрального уравнения

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{1}$$

где $A(s)$ измеримая операторная функция с интегрируемой в квадрате следовой нормой

$$\int_0^T \mid A(s) \mid^2 ds < \infty \tag{2}$$

Операторую функцию $A = A(t)$ рассматриваем как функцию на интервале $[0,T]$, со значениями в гильбертовом пространстве $S_2(H)$ операторов Гильберта-Шмидта со скалярным произведением $(A_1, A_2) = SpA_2^*A_1$ а интеграл в равенстве (1) как интеграл функции со значениями в гильбертовом пространстве всех случайных величин $\eta : E\|\eta\|^2 < \infty$ со скалярним произведением $< \eta_1, \eta_2 >= E(\eta_1, \eta_2)$.($\|\ \|, (\ ,\ )$–это норма и скалярное произведение в гильбертовом пространстве H.) Нас буде тинтересовать вопрос об эквивалентности случайных процессов $\xi = \xi(t)$ и $W = W(t)$ на конечном интервале $[0,T]$.

AMS Subject Classification (1980): Primary 60 G 12, 60 G 15, 60 G 30

2. Решение данного стохастического интегрального уравнения. Согласно общей теории эволюционных уравнений [**5**], решение стохастического интегрального уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\xi(t) = \int_0^t V(t,s)dW(s) + W(t) \tag{3}$$

где $V(t,s) = R(t,s) - I$ операторная функция с интегрируемой в квадрате следовой нормой на конечном интервале $[0,T]$. Операторная функция $R(t,s)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$dR(t,s)/dt = A(t)R(t,s), \quad t > s \tag{4}$$

с начальным условием $R(s,s) = I$, а интеграл в этом решении— это стохастический интеграл. Ито который определяется стандартным способом ([**5**]): сначала для кусочно-постоянных операторных функций, а потом для произвольных операторных функций с интегрируемой в квадрате следовой нормой. Доказательство этого факта можно провести похоже тому как это сделал Розанов [**2**] для конечномерных случайных процессов. В самом деле, из равенства (4) следует

$$V(t,s) = \int_s^t A(x)(V(x,s) + I)dx$$

$$\int_0^t V(t,s)dW(s) + W(t) = \int_0^t \int_s^t A(x)(V(x,s) + I)dxdW(s) + W(t) =$$
$$= \int_0^t A(x) \int_0^x V(x,s)dW(s)dx + \int_0^t \int_0^x A(x)dW(s)dx + W =$$
$$= \int_0^t A(x)\left[\int_0^x V(x,s)dW(s) + W(t)\right]dx + W(t)$$

На конец, напомним еще что операторная функция $R(t,s) = U(t)U^{-1}(s)$ где операторная функция $U(t)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения $dU(t)/dt = A(t) = A(t)U(t)$ с начльным условием $U(0) = I$.

3. Еквивалентность винеровскому процессу. Испльзуя тот факт что решение стохастического интеграьного уравнения (1) имеет вид (3), легко видерь что $E\xi(t)) = 0$ $(E(u, \xi(t) = 0)$ и

$$E \mid (u, \xi(t)) \mid^2 = \int_0^t \|R^*(t,s)u\|^2 ds < \infty.$$

Будем говорить (по Розанову, [**2**]) что процесс $\xi(t)$ эквивалентен процессу $W(t)$ на интервале $[0,T]$ если отображение $B : (u, W(t)) \to (u, \xi(t))$ $u \in H$, $0 \leq t \leq T$ продолжаеця до линейного ограниченного обратимого оператора B из гильбертова пространства $H(W)$ в гильбертово пространство $H(\xi)$ и, кроме того, если разность $I - B^*B$ будет оператором Гильберта-Шмидта. ($H(W)$ и $H(\xi)$—замкнутые, в среднем квадратичном линейные оболочки соотвецтвующих скалярных случайных величин $(u, W(t))$ и $(u, \xi(t))$, $u \in H,\ 0 \leq t \leq T$.)

Из равенства (3) получается

$$A(t)\xi(t) = \int_0^t A(t)R(t,s)dW(s) \tag{5}$$

и согласно определению стохастического интеграла

$$A(t)\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(t)R(t,s)e_k d(e_k, W(s)); \tag{6}$$

откуда следует $EA\xi(t) = 0$ и

$$E\|A(t)\xi(t)\|^2 = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \|A(t)R(t,s)e_k\|^2 d(e_k, W(s)). \tag{7}$$

Следовательно,

$$E\|A(t)\xi(t)\|^2 = \int_0^t \mid A(t)R(t,s) \mid^2 ds \leq \mid A(t) \mid^2 \exp\left(2\int_0^T \|A(x)\|dx\right)T$$

откуда если обозначим

$$a(s) = A(s)\xi(s) \tag{8}$$

получаем $Ea(s) = 0$,

$$\int_0^T E\|a(s)\|^2 ds < \infty \tag{9}$$

и согласно уравнению (1)

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)ds + W(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{10}$$

В силу леммы из [**8**], разность корреляционных функций

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^s K(x,y)dxdy$$

где $K(x,y)$ имеет интегрируемую в квадрате следовую норму. Это значит что отображение $B : (u, W(t)) \to (u, \xi(t))$, $u \in H,\ 0 \leq t \leq T$ продолжается до линейного ограниченного оператора B из гильбертова пространства $H(W)$ в гильбертово пространство $H(\xi)$ и разность $I - B^*B$ оператор Гильберта-Шмидта. Для эквивалентности случайных процессов $\xi(t)$ и $W(t)$ нужно еще чтобы B был обратимым.

Рассмотрим условие обратимости (36) из работы [**8**] Предположим противное. Для какой-то интегрируемой в квадрате функции $b = b(x)$ со значениями в гильбертовом пространстве H.

$$\int_0^T \|b(x)\|^2 dx \neq 0$$

имеем с вероятностью один

$$\int_0^T (b(x),\, A(x)\xi(x))dx + \eta(b) = 0 \tag{11}$$

где, напомним,

$$\eta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b(y),\, e_k) d(e_k,\, W(s)) \tag{12}$$

$$E \mid \eta(b) \mid^2 = \int_0^T \|b(y)\|^2 dy \tag{13}$$

Согласно равенству (6)

$$(b(x), A(x)\xi(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (R^*(x,y)A^*(x)b(x), e_k) d(e_k, W(y)) \tag{14}$$

$$\int_0^T (b(x), A(x)\xi(x))dx = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (R^*(x,y)A^*(x)b(x), e_k) d(e_k, W(y))dx \tag{15}$$

Дальше,

$$\int_0^T (b(x), A(x)\xi(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x), e_k) dx d(e_k, W(y)) \tag{16}$$

Согласно равенствам (11), (12) и (16), имеем что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left[\int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x), e_k)dx + b(y), e_k) \right] d(e_k, W(y)) = 0 \tag{17}$$

и следовательно для всех k и почти всех $y \in [0,T]$

$$\left(\int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x))dx + b(y), e_k \right) = 0$$

т. е. для почти всех $y \in [0,T]$

$$\int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x))dx + b(y) = 0 \tag{18}$$

Используя тот факт что $R^*(x,y) = (U^{-1}(y))^* U^*(x)$ и что $(U^{-1}(y))^*$ линейный ограниченный оператор, из равенства (18) мы получаем

$$(U^{-1}(y))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x) + b(x) = 0 \tag{19}$$

Из этого равенства видно что $b(y)$ дифференцируемая функция и

$$\frac{d(U^{-1}(y))^*}{dy} \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x)dx - (U^{-1}(y))^* U^*(y)A^*(y)b(y) + \frac{db(y)}{dy} = 0$$

Используя тот факт что

$$d(U^{-1}(y))^*/dy = -A^*(y)(U^{-1}(y))^*, \ \ (U^{-1}(0))^* = I$$

получаем

$$-A^*(y)(U^{-1}(y))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x)dx - A^*(y)b(y) + db(y)/dy = 0$$

откуда видно согласно равенству (19), что

$$-A^*(y)(-b(y)) - A^*(y)b(y) + db(y)/dy = 0$$

т. е. для почти всех $y \in [0,T]$

$$db(y)/dy = 0. \tag{20}$$

Из равенства (18) видно, что функция $(b(y), u)$ абсолютно непрерывна для всех $u \in H$ и, согласно общим теоремам ([**6**]), из (20) следует, что для $y \in [0,T] : b(y) = u_o, \ u_0 \in H$.

Рассмотрим снова равенство (19)

$$(U^{-1}(x))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)u_0 dx + u_0 = 0 \tag{21}$$

Используя тот факт что $U^*(x)A^*(x) = dU^*(x)/dx$ согласно общим теоремам ([**6, 7**]), получаем

$$(U^{-1}(y))^*(U^*(T)u_0 - U^*(y)u_0 = 0$$

и следовательно $R^*(T,s)u_0 = 0$ для линейного обратимого оператора $R^*(T,s)$, откуда $u_0 = 0$, $b(y) = 0$ для почти всех $y \in [0,T]$ и

$$\int_0^T \|b(y)\|^2 dy = 0$$

что невозможно и значит, условие обратимости для наших случайных процессов выполняеця. Сформулируем полученные результаты в виде следующего предложения.

Теорема 1. *Пусть $W = W(t), 0 \le t \le T$ стандартный винеровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве и $\xi = \xi(t)$ решение стохастического интегрального уравнения*

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)ds + W(t), \quad 0 \le t \le T$$

где $A(s)$ измеримая операторная функция с интегрирумой в квадрате следовой нормой. Случайные процессы $\xi = \xi(t)$ и $W = W(t)$ эквивалентны на конечном интервале $[0,T]$.

Сейчас, рассмотрим одно следствие этой теоремы. Обозначин через $H_t(\xi)$ замакнутую (в среднем квадратичном) линейную оболочку всех скалярных случайных величин $(u, \xi(s))$, $0 \le s \le t$, $u \in H$ и через P_t–оператор ортогонального проектирования на $H_t(\xi)$. Определим спектральный тип случайного процесса $\xi = \xi(t)$ как спектральный тип самосопряженного оператора

$$F = \int_0^T t\, dP_t$$

действующего в гильбертовом пространстве $H(\xi)$. В случае стандартного винеровского процесса $W(t)$, сепарабельное гильбертово пространство

$$H_t(W) = \oplus_{k=1}^{\infty} H_t(\omega_k)$$

где $\omega_k(t) = (e_k, W(t))$, $k = 1, 2, \ldots$ скалярные ортогональные между собой винеровские процессы и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. В силу хорошо известных факторов ([**1, 2**]), спектральным типом винеровского процесса $W = W(t)$ является $dt \le dt \le \ldots$ В силу хорошо известной теоремы ([**1,2**]), из доказаной теоремы следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $W = W(t)$, $0 \le t \le T$ стандартый винеровский процесс в сепарабельном гильбертовом пространстве и $\xi = \xi(t)$ решение стохастического интегрального уравнения*

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)ds + W(t), \quad 0 \le t \le T$$

где $A(s)$ измермая операторная функция с интерирумой в квадрате следовой. Тогда случайные процессы $\xi = \xi(t)$ и $W = W(t)$ имеют тот-же спектральный тип. Спектральным типом процесса $\xi = \xi(t)$, является $dt \le dt \le \ldots$

Более того, из равенств (1) и (3) следует что $H_t(\xi) = H_t(W)$, для всех $t \in [0, T]$. Действительно, из равенства (3) следует

$$(u, \xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (R^*(t,s)u, e_k) d(e_k, W(s))$$

откуда видно что $H_t(\xi) \subseteq H_l(W)$. Из равенства (1) следует

$$(u, \xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (A^*(s)u, \xi(s))ds + (u, W(t))$$

откуда видно что $H_t(W_0) \subseteq H_t(\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Z. Ivković, J. Bulatović, J. Vukmirović, S. Živanović, *Application of spectral multiplicity in separable Hilebert space to stohastic processes*, Math. Inst. Beograd, 1974.

[2] Ю. А. Розанов, *Теория оновляющихся процессам*, Наука, Москва, 1974.

[3] Ю. А. Розанов, *Марковские случайные поля*, Наука, Москва, 1981.

[4] М. П. Ершов, *Об абсолютной непрерывности мер, отвечающих процессам диффузионого типа*, Теория вероятностей и ее применения **17** (1972), 173–178.

[5] Ю. А. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространстах*, Наука Москва, 1983.

[6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операроры общая теория*, Наука, Москва, 1962.

[7] А. Т. Талдыкин, *Элементы прикладного функционаьного анализа*, Высшая школа, Москва, 1982.

[8] Љ. Петрушевски, *Об эквивалентности одногa класса случайных процессов в гильбертовом пространстве и винеровского процесса*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), this issue.

Arhitektonski fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Поступила 30 05 1988)