PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 44 (58), 1988, pp.77–89

INDIVIDUALISATION DES BASES RATIONNELLES DES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES

Lando Degoli

Résumé. Après avoir démontré que la variété base d'un système linéaire de quadriques de S_r à Jacobienne de caractéristique $r-k$ est: ou un S_k double, ou une variété réductible qui possède deux sub-variétés rationnelles, ou une variété rationnelle irréductible, on détermine toutes les variétés rationnelles de ce dernier type.

1. Dans l'espace linéaire complexe S_r de coordonnées projéctives homogènes $x_i (i = 0, 1, \dots, r)$ choisissons $d+1$ quadriques linéairement indépendantes:

$$f_0 = 0, \ \ f_1 = 0, \dots, f_d = 0$$

avec:

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} x_i x_k \quad (a_q^{ik} = a_q^{ki}).$$

Le système linéaire $L_{d/m}$ de dimension d et Jacobienne de caractéristique m est exprimé par l'équation:

$$\sum_{q=0}^{d} \rho_q f_q = 0.$$

Supposons que la matrice Jacobienne à $r+1$ lignes et $d+1$ colonnes:

$$J = \|\delta f_q / \delta x_i\| \ (q = 0, 1, \dots, d, \ i = 0, 1, \dots, r)$$

soit à caractéristique $m \leq d$.

Souvent, si $m < r$, nous mettons $m = r - k$ et le système sera indiqué par $L_{d/r-k}$. Lorsque la Jacobienne est indentiquement nulle, tout S_r est donc le lieu de points conjugués par rapport à toutes les quadriques du système. Si la Jacobienne a la caractéristique $r-k$, un point générique P de S_r est conjugué avec un S_k.

AMS Subject Classification (1980): Primary 51N15.

Un système linéaire de quadriques est dit "réductible" lorsqu'il existe des systèmes subordonnés sans quadriques en commun:

$$L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \dots, L_{d_s/m_s}$$

et éventuellement $p (p \geq 0)$ quadriques fonctionellement indépendantes qui satisfont aux égalités:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_s + s + p - 1, \quad m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s + p.$$

Au cas contraire le système sera dit "irréductible". Nous avons démontré [4] le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire irréductible de quadriques L_d de S_r soit à Jacobienne de caractéristique $r - k \leq d (d \geq r,\, k \geq 0)$ est que les quadriques du système qui passent par un point générique de S_r possèdent en commun un S_{k+1}.*

Ensuite [9] nous avons démontré:

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les quadriques d'un système linéaire L_d de S_r qui passent par un point générique P de S_r possèdent en commun un S_{k+1}, est que ∞^k cordes de la variété base du système sortent par P.*

Ces deux théorèmes nous permettent de déterminer la nature des variétés bases des systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle.

THÉORÈME A. *La variété base d'un système linéaire irréductible de quadriques $L_{d/r-k} (r - k \leq d)$ de S_r est seulement une des variétés suivantes:*

(1) *un S_k double, et dans ce cas les quadriques sont des S_k-cônes avec S_k-somment en commun:*

(2) *une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimensions h et $r - h + k - 1$ $(1 < h \leq r - 2)$,*

(3) *une variété rationnelle irréductible de dimension: $(r + k - 1)/2$.*

Démonstration. Prenons en consideration le cas particulier $k = 0$. Prenons le système linéaire irréductible de quadriques $L_{d/r} (r \leq d)$ de S_r. Pour le théorème 1 les quadriques de L_d, qui passent par un point générique P de S_r, ont en commun une droite, qui est une corde de la variété base V du système.

Soit R le complexe des droites constitué par toutes les cordes de V, qui à cause du théorème cité, remplissent tout S_r. Entrecoupons ce complexe par un hyperplan S_{r-1}. Chaque droite du complexe sera entrecoupée dans un point. Il est ainsi possible d'établir une correspondance biunivoque parmi les points de l'hyperplan et les droites des complexe R. Pour cela complexe R est rationnel.

Supposons que les quadriques aient en commun un point double A. Il en résulte que toutes les droites, qui sortent de A, sont des cordes dans la variété constituée par le point A. Elles remplissent tout S_r et évidemment elles forment un complexe rationnel. Les quadriques ne peuvent pas avoir un autre point double B en commun, autrement dît par un point générique P il passerait plus qu'une corde: la droite PA et la droite PB. Par conséquent la caractéristique de la Jacobienne serait $< r$, contredisant l'hypothèse.

Il s'ensuit que les quadriques sont des cônes avec un S_0-sommet en commun.

A part ce cas, puisque R est rationnel, il s'ensuite que les coordonnées de droite de ses droites, les p_{ik}, c'est à dire les mineurs extraits de la matrice:

$$\begin{Vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \dots x_r \\ y_0 & y_1 & y_2 \dots y_r \end{Vmatrix}$$

sont des fonctions rationnelles de $r-1$ paramètres indépendants.

Nous pouvons indiquer avec $M(x_0, x_1, \dots, x_r)$ et $N(y_0, y_1, \dots, y_r)$ deux points quelconque de la variété base et avec MN la corde qui les joint.

Notons que, en indiquant avec $x'_0, x'_1, \dots, x'_r$ les coordonnées d'un point générique P de S_r, parce que la corde MN passe par P, il faut que tous les mineurs du troisième ordre extraits de la matrice:

$$\begin{Vmatrix} x'_0 & x'_1 & x'_2 \dots x'_r \\ x_0 & x_1 & x_2 \dots x_r \\ y_0 & y_1 & y_2 \dots y_r \end{Vmatrix}$$

soient nuls; cela implique que les p_{hk} génériques sont des combinaisons linéaires des p_{0h} et p_{ok}, parce que, le mineur:

$$\begin{vmatrix} x'_0 & x'_h & x'_k \\ x_0 & x_h & x_k \\ y_0 & y_h & y_k \end{vmatrix}$$

étant nul, nous devons avoir:

$$x'_0 p_{hk} - x'_h p_{0h} + x'_k p_{0k} = 0$$

et cela montre que pour que les p_{hk} soient rationnels il suffit que les $p_{0i} (i = 1, 2, \dots, r)$ soient rationnels.

Si la variété base est réductible, il existera dans elle deux variétés subordonnées W et Z de dimensions respectives h et $r-h-1\,(1 \leq h \leq r-2)$. On réjette le cas $h=0$ et $h=r-1$ parce que dans ce cas les quadriques contiennent au moins un hyperplan. Donc elles sont un couple d'hyperplans ayant un hyperplan en commun.

Les autres hyperplans du couple devraient possèder un S_0: il s'ensuit que leur nombre est ∞^{r-1}. Pour cela le système de quadriques aurait la dimension $d = r-1$, ce qui contredit l'hypothèse qu'il soit $r \leq d$.

Les variétés W et Z ont les dimensions citées parce que, en projectant W par un point générique P, on obtient une variété T de dimension $h+1$, qui entre coupe Z seulement dans un point Q externe à la variété intersection de W avec Z. En effet, on obtient que la droite PQ est corde de V, seulement dans ce cas

P est conjugué avec un seul point par rapport à toutes les quadriques du système. Notons les équations paramétriques de W:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \Lambda_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h),\ x_2 = \Lambda_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h), \dots,$$
$$x_r = \Lambda_r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h)$$

On peut indiquer celles de Z avec

$$y_0 = 1,\ y_1 = \Omega_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-h-1}),\ y_2 = \Omega_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-h-1}), \dots,$$
$$y_r = \Omega_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-h-1})$$

Les r p_{ik} premiers extraits de la matrice résultent:

$$p_{01} = \Omega_1 - \Lambda_1,\ p_{02} = \Omega_2 - \Lambda_2, \dots, p_{0r} = \Omega_r - \Lambda_r$$

Il s'ensuite que les differences: $\Omega_i - \Lambda_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$ doivent être rationnelles dans les paramétres σ_m, τ_n. Pour cella l'eventuelle partie irrationnelle de Ω_i et Λ_i doit s'eclipser par la différence.

On en déduit que: $\Lambda_i = C_i - E_i$, $\Omega_i = D_i - E_i\ (i = 1, 2, \dots, r)$ où C_i et D_i sont fonctions rationnelles et E_i est l'eventuelle partie irrationnelle de Ω_i et Λ_i.

Fixons un point M sur W; ainsi $C_i = C$ et $E_i = E$ (C et E sont des constantes). En variant le point N sur Z, il s'ensuit que, pour que la difference $\Omega_i - \Lambda_i$ soit toujours rationnelle il faut que E_i soit toujours égal à E, c'est à dire: E_i est constant. Analoguement, si nous tenons fixé Ω_i et faisons varier Λ_i sur W, on obtient le même résultat.

Mais si E_i est constant dans les deux variétés, il n'est plus irrationnel.

A cause de cela Λ_i et Ω_i sont rationnelles, comme il fallait démontrer.

Supposons maintenant que V soit irréductible. Si h est sa dimension, puisque ses cordes sont ∞^{2h}, chaque corde possède ∞^1 points, il s'ensuit que $2h + 1 = r$, c'est à dire: $h = (r-1)/2$. Il s'ensuit que r est nécessairement impair.

En répetant le raisonnement que nous avons fait précedemment, choisissons deux points $M(x_0, x_1, \dots, x_r)$ et $N(y_0, y_1, \dots, y_r)$ sur cette variété. Ecrivons les équations de V en forme paramétrique:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \Delta_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2}),\ x_2 = \Delta_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2}), \dots,$$
$$x_r = \Delta_r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2})$$
$$y_0 = 1,\ y_1 = \Delta_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2}),\ y_2 = \Delta_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2}), \dots,$$
$$y_r = \Delta_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2})$$

Les premiers p_{ik} résultent:

$$\begin{aligned}
P_{01} &= \Delta_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2}) - \Delta_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2})\\
P_{02} &= \Delta_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2}) - \Delta_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P_{0r} &= \Delta_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r-1)/2}) - \Delta_r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2})
\end{aligned}$$

En répétant les considérations précédentes, nous pouvons fixer le point M, et par conséquent le $\Delta_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r-1)/2})$, et faire varier le point N sur toute la variété.

Par le raisonnement précedent, puisque les $p_{0k}(k = 1, 2, \dots, r)$ sont rationnels, les Δ_i aussi seront rationnelles, comme il fallait démontrer.

Prenons maintenant le système $L_{d/r-1}(r-1 \leq d)$ irréductible. Intercoupons ce système par un hyperplan. Par un théorème bien connu de Terracini [11], on obtient un système de quadriques irréductible de S_{r-1} ayant la même dimension et la même caractéristique.

Notons ce système par $L'_{d/r-1}$. Puisque l'espace qui le contient a la dimension $r-1$, ce système satisfait à la démonstration précédente et sa variété est une des suivantes:

(1) un point double de S_{r-1};

(2) une variété réductible de S_{r-1}, qui possède deux variétés retionnelles de dimensions h_1 et $r - h_1 - 2(1 \leq h_1 \leq r-3)$;

(3) une variété irréductible de S_{r-1} de dimension $(r-2)/2$ (r est un nombre pair).

Ces variétés sons évidemment les sections hyperplanes de la variété base du système $L_{d/r-1}$.

Puisque on obtient ce résultat par un S_{r-1} quelconque, il s'ensuit que la variété base de $L_{d/r-1}$ est une des suivantes:

(1) une droite double de S_r (en effet un hyperplan générique de S_r coupe dans un seul point double sulement une droite double);

(2) une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimensions $h = h_1 + 1$ et $r - h = r - h_1 - 1$ (les variétés doivent être nécessairement rationnelles parce que leur sections avec un hyperplan générique sont rationnelles; si, en effet, une seule coordonnée, par example $x_m = \Delta_m(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{h+1})$, était fonction irrationnelle des paramètres, la section hyperplane $x_s = 0\,(s \not\equiv m,\ 0 \leq s \leq r)$ serait irrationnelle contredisant la démonstration précédente; les dimensions de ces variétés sont évidemment h_1+1 et $r-h_1-1$);

(3) une variété rationnelle irréductible de dimension $r/2$ (cette variété doit être rationnelle pour le même motif susdit et elle doit avoir la dimension $r/2$ pour que la section hyperplane ait la dimension $(r-2)/2$.

Prenons maintenant le système $L_{d/r-2}(r-2 \leq d)$ de S_{r-1}, qui par rapport à S_{r-1}, se trouve dans les mêmes conditions que le système $L_{d/r-1}$ par rapport à S_r. Pour cela les conclusions précédentes seront vrais et la variété base de $L_{d/r-2}$ sera une des suivantes:

(1) un plan double;

(2) une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimensions h et $r - h + 1 = r - h + 2 - 1$;

(3) une variété rationnelle irréductible de dimension $(r-1)/2$ (r est un nombre impair).

Prenons maintenant le système $L_{d/r-3}(r-3 \leq d)$. En sectionnant ce système par un hyperplan et en répétant le raisonnement précédent on trouvera que la variété base sera une des suivantes:

(1) une S_3 double;

(2) une variété réductible, qui possède deux variétés rationnelles de dimensions h et $r-h+2 = r-h+3-1$;

(3) une variété rationnelle irréductible de dimension $(r+2)/2$ (r est un nombre pair).

En poursuivant ainsi il est évident qu'on parvient à démontrer le théorème.

2. Maintenant nous voulons déterminer de quel type est la variété rationnelle irréductible, qui figure au troisième cas du théorème précédent.

Pour cela nous démontrons le lemme suivant:

LEMME 1. *Dans S_r il existe une variété de Segre donnée par le produit cartésien d'un S_1 et d'un $S_{(r-1)/2}$, qui est une base d'un système linéaire de quadriques de S_r à Jacobienne de caractéristique $r-2$ (r est un nombre impair).*

Démonstration. Indiquons respectivement avec:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0, \dots,\ y_{(r+1)/2} = 0$$

les $S_{(r-1)/2}$ et S_1 de S_r (r est un nombre impair) exprimés dans l'énoncé du théorème. La variété de Segre engendrée par les deux espaces a les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{array}{lll} & x_0 = y_0 y_2 & x_1 = y_1 y_2 \\ & x_2 = y_0 y_3 & x_3 = y_1 y_3 \\ (1) & \dots\dots\dots\dots\dots ; & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_{r-1} = y_0 y_{(r+1)/2} & x_{r-1} = y_1 y_{(r+1)/2} \end{array}$$

En éliminant les y_i on obtient:

$$(2) \qquad \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5} = \cdots = \frac{x_{r-1}}{x_r}$$

qui sont les équations canoniques de la variété de Segre recherchée.

Comme on peut aisement vérifier elle est la variété base du système linéaire des quadriques:

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0;\ x_0 x_5 - x_1 x_4 = 0; \dots;\ x_{r-3} x_r - x_{r-2} x_{r-1} = 0$$

de dimension: $\binom{(r+1)/2}{2} - 1 = (r^2-9)/8$.

La caractéristique de la Jacobienne du système est $r-2$. En effet si on écrit (2) en forme paramétrique:

$$\begin{array}{lllll} x_0 = 1 & x_2 = \nu & x_4 = \rho & \dots & x_{r-1} = \sigma \\ x_1 = \tau & x_3 = \tau\nu & x_5 = \tau\rho & \dots & x_r = \tau\sigma \end{array}$$

observons que, en choisissant un point générique $P(x_0, x_1, \dots, x_r)$ de S_r, en indiquant par $M(1, \tau, \nu, \tau\nu, \rho, \tau\rho, \dots, \sigma, \tau\sigma)$ et $N(1, \tau_1, \nu_1, \tau_1\nu_1, \rho_1, \tau_1\rho_1, \dots, \sigma_1, \tau_1\sigma_1)$ deux points de la variété de Segre, pour que M, N et P soit sur la même droite il faut et il suffit que soient nuls tous les mineurs du troisième ordre extraits de la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{r-1} & x_r \\ 1 & \tau & \nu & \tau\nu & \rho & \tau\rho & \dots & \sigma & \tau\sigma \\ 1 & \tau_1 & \nu_1 & \tau_1\nu_1 & \rho_1 & \tau_1\rho_1 & \dots & \sigma_1 & \tau_1\sigma_1 \end{matrix} \right\|$$

Pour que cela soit vrai il faut que le premier soit nul, ainsi que tous ceux qu'on obtient en remplaçant à la troisième colonne successivement tous les autres. On obtient un système algébrique avec $r-1$ équations et $r+1$ inconnues: $\tau, \tau_1, \nu, \nu_1, \rho, \rho_1, \dots, \sigma, \sigma_1$. Ce système est de premier degré par rapport à $\nu, \nu_1, \rho, \rho_1, \dots, \sigma, \sigma_1$, qui seront tous exprimés en fonction de τ, τ_1, par des polynômes de premier degré.

Cela démontre que ∞^2 cordes de la variété base du système, qui constituent un S_3, passent par P et, a cause du théorème 2, la caractéristique de la Jacobienne est $r-2$.

Remarque. Si dans le Lemme précédent on remplace r par $2r-3$, et par conséquent $(r-1)/2$ par $r-2$, et $r-2$ par $2r-5$, la variété de Segre est le produit cartésien d'un S_1 avec un S_r et elle est la base d'un système linéaire de quadriques de S_{2r-3} à Jaconienne de caractéristique $2r-5$.

Ces substitutions nous pérmettent de démontrer plus aisement le Lemme suivant:

LEMME 2. *Il n'existe aucune variété de Segre différente de la précédente qui soit la base d'un système linéaire de quadriques à Jacobienne identiquement nulle.*

Démonstration. Considérons un S_{k-1} et un S_{r-k} (r est un numéro impair) dont les équations respectives sont données par:

$$\begin{aligned} y_0 = 0, \qquad y_1 &= 0, \quad \dots, \quad y_{r-k} = 0 \\ y_{r-k+1} = 0, \quad y_{r-k+2} &= 0, \quad \dots, \qquad y_r = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Prenons: $x_{u\nu} = y_u y_\nu$ $(u = 0, 1, \dots, k-1,\ \nu = k, k+1, \dots, r)$, formules qui expriment les équations paramétriques de la variété générique de Segre de $S_{k(r-k+1)-1}$.

En éliminant y_u et y_ν on obtient les quadriques:

$$x_{u\nu}x_{u'\nu'} - x_{u'\nu}x_{u\nu'} = 0 \ (u \neq u' = 0, 1, \dots, k-1,\ \nu \neq \nu' = k, k+1, \dots, r) \tag{4}$$

dont la variété base est la variété de Segre $V_{(k)}$ des couples des espaces S_{k-1} et S_{r-k}.

Ces quadriques sont exprimées par les mineurs du second ordre extraits de la matrice:

$$\begin{Vmatrix} x_{0,k} & x_{0,k+1} & \dots & x_{0,r} \\ x_{1,k} & x_{1,k+1} & \dots & x_{1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{k-1,k} & x_{k-1,k+1} & \dots & x_{k-1,r} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

Elles sont toutes linéairement indépendantes et elles donnent un système linéaire de dimension:

$$\delta = \binom{k}{2}\binom{r-k+1}{2} - 1.$$

Ce système est complet parce que si une quadrique de S_r du type:

$$\sum_{u.u''=0}^{k-1} \sum_{\nu.\nu''=k}^{r} a^{u\nu u''\nu''} x_{u\nu} x_{u''\nu''} = 0 \ (a^{u\nu u''\nu''} = a^{u''\nu'' u\nu}) \tag{6}$$

contient la variété de Segre $V_{(k)}$, remplaçant (3) dans (5), cette dernière est satisfaite identiquement et pour cela on obtient:

$$a^{u\nu u''\nu''} = 0 \ \ a^{u\nu u'\nu'} = -a^{u\nu' u'\nu}$$

Donc (6) devient:

$$a^{u\nu u'\nu'}(x_{u\nu}x_{u'\nu'} - x_{u\nu'}x_{u'\nu}) = 0$$

et à cause de cela la quadrique considerée appartient au système.

Dans le cas $k = 2$ (voir la remarque précédente) on obtient la variété de Segre considerée dans le lemme 1.

Démontrons que pour $k > 2$ le système linéaire de quadriques de dimension δ, qui est au moins:

$$h = k(r - k + 1) - 1 \tag{7}$$

la dimension de l'espace ambiant, n'a pas la matrice Jacobienne identiquement nulle.

De (7) il s'ensuit que:

$$2r \geq k(r - k + 1) \tag{8}$$

Puisque $1 < k < r$ on obtient $k + 1 \leq r$.

On peut exclure le cas $k+1 = r$, car alors S_{r-k} et S_{k-1} seraient respectivement S_1 et S_{r-2}, et en obtiendrait le résultat déjà connu, contemplé dans la remarque.

Il s'ensuite que $r = k + 1 + \omega$. Mais (8) est satisfait par $r > k + 1$, $k > 2$, c'est à dire par une des solutions suivantes:

$$\mathrm{I}\begin{cases} r = 5 \\ k = 3 \end{cases}; \quad \mathrm{II}\begin{cases} r = 6 \\ k = 3 \end{cases}; \quad \mathrm{III}\begin{cases} r = 6 \\ k = 4 \end{cases}$$

Les deux dernières solutions donnent la même variété de Segre.

Le premier cas donne: $\delta = 8$, $h = 8$, et on peut écrire la matrice (5) très aisement de la façon suivante:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_3 & x_6 \\ x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

A cause de cela la variété de Segre V sera donnée par le système d'équations:

$$\Xi_j = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, 8)$$

où Ξ_j est le complément algébrique de x_j dans la matrice (9).

Nous obtenons:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_6}{x_7}; \quad \frac{x_0}{x_2} = \frac{x_3}{x_5} = \frac{x_6}{x_8}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_7}{x_8}$$

et elle est la base d'un système linéaire de quadriques L_8 de S_8.

On vérifie aisément que la Jacobienne de ce système n'est pas identiquement nulle.

Le second cas, projectivement identique au troisième, fournit un système L_{17} de S_{11}, dans lequel les quadriques sont données par les mineurs du second ordre extraits de la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_3 & x_6 & x_9 \\ x_1 & x_4 & x_7 & x_{10} \\ x_2 & x_5 & x_8 & x_{11} \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

et la variété de Segre Z, qui est la base du système est:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_6}{x_7} = \frac{x_9}{x_{10}}; \quad \frac{x_0}{x_2} = \frac{x_3}{x_5} = \frac{x_6}{x_8} = \frac{x_9}{x_{11}}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_7}{x_8} = \frac{x_{10}}{x_{12}}$$

Considérons dans S_{11} le S_8 d'équations $x_9 = x_{10} = x_{11} = 0$ et dans cet espace considérons la variété qui annule toutes les quadriques individualisées par les trois premières colonnes de la matrice (10), c'est à dire:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_3 & x_6 \\ x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \end{matrix} \right\|$$

Celle ci est la variété de Segre V considerée dans le cas précédent. A cause de cela Z est plongée dans la variété qu'on obtient en projetant V du plan d'équations:

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

Si par un point générique de S_{11} il sortait au moins une corde de la variété Z, projetant du susdit plan V, il résulterait que par un point générique de S_8 il sortirait au moins une corde de la variété V à cause de cela la Jacobienne du système linéaire précédent serait identiquement nulle, ce qui contredirait la démonstration précédente.

Il s'ensuit que Z est la base d'un système linéaire L_1 de quadriques à matrice Jacobienne qui n'est pas identiquement nulle.

Donc le lemme est démontré.

Nous avons aussi le théorème suivant:

THÉORÈME B. *La variété base qui n'est pas un cône, et qui est rationnelle et irréductible d'un système linéaire irréductible de quadriques* $L_{d/r-k}(r-k \leq d,\ k \geq 0)$ *n'existe pas pour* $k > 2$ *et dans les autres cas il s'agît d'une:* $S_i - V_{i+1}^{r-i}\ (i = (r+k-3)/2,\ k = 0,1,2)$.

Démonstration. Commençons par observer que si dans S_r il existe une variété rationnelle irréductible qui est la base d'un système linéaire irréductible du quadriques à Jacobienne de caractéristique $r-k\,(k \geq 0)$ dans $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots, S_{r+h}$ il existe respectivement des S_0-cônes, S_1-cônes, …, S_{h-1}-cônes, qui par un $S_0, S_1, \dots, S_{h-1}$ projetent cette variété et ils résultent euxmemes des variétés bases pour des systèmes linéaires irréductibles de quadriques à Jacobienne de caractéristique $r-k = r+h-(k+h)$.

Naturellement, dans S_{r+h} la variété base des systèmes linéaires susdits n'est pas à confondre avec les S_k-cônes dont parle le théorème 2, lesquels ont pour variété base des S_k doubles.

En sectionnant S_{r+h} avec S_r on obtient, à cause d'un théorème bien connu de Terracini [11], un système linéaire de quadriques de S_r ayant la même dimension et la même caractéristique $r+h-(k+h) = r-k$. C'est à dire, on trouve un système projectivement identique au système donné.

En excluant ces cas banals, observons que à cause du théorème A la variété irréductible V, base du système linéaire, doit être de dimension $(r+k-1)/2$, et à cause de cela nous indiquons par:

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = \Omega_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r+k-1)/2}),\ \ x_2 = \Omega_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r+k-1)/2}), \dots$$
$$x_r = \Omega_r(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r+k-1)/2})$$

les équations paramétriques de la variété base.

Naturellement les $\Omega_i(i = 1, \dots, r)$ sont toutes des fonctions rationnelles aux paramétres $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r+k-1)/2}$.

Soit maintenant $P(x_0, x_1, \dots, x_r)$ un point générique de S_r. Par P à cause du théorème 2, sortent ∞^k cordes de V. Considérons une des ces cordes, qui intercoupera dans M et N la variété V. Les coordonnées de M et N pourront être exprimées au moyen de (11).

Nous introduisons les abréviations:

$$\begin{aligned} &\Omega_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{(r+k-1)/2}) = \Omega_i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, r) \\ &\Omega_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(r+k-1)/2}) = \Omega_1' \end{aligned}$$

où τ_s et σ_s $(s = 1, 2, \dots, (r + k - 1)/2)$ sont les valeurs des paramétres respectifs dans M et N. Il s'ensuit que, puisque M, N, P sont trois points sur la même droite, les mineurs du troisième ordre extraits de la matrice.

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ 1 & \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_r \\ 1 & \Omega'_1 & \Omega'_2 & \dots & \Omega'_r \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

sont tous nuls.

Pour que cela soit vrai il faut et il suffit que soit nul le premier mineur ainsi que tous ceux qu'on obtient en remplaçant à la troisième colonne successivement toutes les autres.

On obtient ainsi un système algébrique avec $r - 1$ equations et $r + k - 1$ inconnues. Puisque la caractéristique de la Jacobienne est $r - k$, le point P a pour conjugué un S_k, et a cause de cela il faut qu'on puisse résoudre notre système par rapport à $r - 1$ inconnues en fonction linéaires des k inconnues restantes.

Pour $k = 2$ dans S_3 la matrice (12) se réduit à quatre colonnes, et le système algébrique aux équations:

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ 1 & \Omega'_1 & \Omega'_2 \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ 1 & \Omega_1 & \Omega_3 \\ 1 & \Omega'_1 & \Omega'_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

Pour que ce système ait les solutions cherchées il faut que par exemple Ω_1 et Ω'_1, Ω_2 et Ω'_2 soient des polinômes de premier degré par rapport à τ_i et σ_i et qu'on ait: $\Omega_3 = \Omega_1 \Omega_2$ et $\Omega'_3 = \Omega'_1 \Omega'_2$.

Dans le cas $r = 5$ on doit ajouter à la matrice les deux colonnes:

$$\begin{matrix} x_2 & x_5 \\ \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega'_4 & \Omega'_5 \end{matrix}$$

et pour que le système ait des solutions linéaires à la manière indiquée, il faut que, par exemple Ω_4 et Ω'_4 soient des polynômes linéaires en τ_i et σ_i et il faut que:

$$\Omega_5 = (\Omega_1 + a_2 \Omega_2)\Omega_4; \;\; \Omega'_5 = (\Omega'_1 + a'_2 \Omega'_2)\Omega'_4$$

avec a_2, a'_2 constantes.

En continuant ainsi on voit que les colonnes successives, prises deux à deux, sont composées par des polynômes de premier degré et par le produit des Ω_{i+2} et Ω'_{i+2}, qui sont des combinaisons linéaires des Ω_i et Ω'_i $(i \neq 1)$ précédentes. Il s'ensuit que la variété base V aura des équations paramétriques du type:

$$\begin{gathered} x_0 = 1, \; x_1 = \Omega_1, \; x_2 = \Omega_2, \; x_3 = \Omega_1 \Omega_2, \; x_4 = \Omega_4, \; x_5 = (\Omega_1 + a_2 \Omega_2)\Omega_4, \; x_6 = \Omega_6, \\ x_7 = (\Omega_1 + a_2 \Omega_2 + a_4 \Omega_4)\Omega_6, \dots, \; x_{r-1} = \Omega_{r-1}, \; x_r = \Big(\Omega_1 + \sum_{i=1}^{(r-1)/2} a_{2i} \Omega_{2i}\Big)\Omega_{r-1}. \end{gathered} \tag{13}$$

Naturellement, l'ordre des coordonnées pourra être divers, mais dans l'ensemble, en excluant deux variables, par exemple x_0 et x_1, comme dans le cas ci dessu, il devra exister autant de coordonnées égales à des polynômes de premier degré en τ_i, σ_i que de coordonnées égales aux produits du polynome Ω_{i+2} pour des combinaisons linéaires des Ω_i, qui les précédent.

Observons que (13) annulent les quadriques suivantes:

$$\begin{array}{ll} x_0x_3 = x_1x_2 & \text{dans } S_3 \\ x_0x_5 = x_4(x_1+x_2) & \text{dans } S_5 \\ x_0x_7 = x_6(x_1+x_2+x_4) & \text{dans } S_7 \text{ etc.} \end{array}$$

Mais le nombre $d+1$ des quadriques linéairemens indépendantes ne peut pas être inférieur à $r-2$, qui est la caractéristique de la Jacobienne du système linéaire donné.

Il en résulte qu'il existe une seule possibilité pour (13): il faut que les a_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, (r-1)/2$) soient tous nuls. En ce cas on obtient:

$$\begin{array}{l} x_0 = 1,\ x_1 = \Omega_1,\ x_2 = \Omega_2,\ x_3 = \Omega_1\Omega_2,\ x_4 = \Omega_4,\ x_5 = \Omega_1\Omega_4,\ x_6 = \Omega_6, \\ x_7 = \Omega_1\Omega_6,\ \ldots,\ x_{r-1} = \Omega_{r-1},\ x_r = \Omega_1\Omega_{r-1}. \end{array}$$

En éliminant les Ω_i on trouve que la variété base est donnée par:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_{r-1}}{x_r}$$

qui est exactement la variété de Segre contemplée dans le lemme 1.

Elle est aussi une $S_i - V_{1+i}^{r-i} (i = (r-1)/2)$. C'est à dire une $V_{(r+1)/2}^{(r+1)/2}$ rationnelle normale formée par ∞^1 $S_{(r-1)/2}$ qui s'appuyent à des droites gauches. Il n'y a pas moyen pour $k > 2$ d'obtenir des variétés bases qui ne sont pas des cônes, parce que k ne peut pas être impair. En effet si $k = 2h+1$, les $h\Omega_i$ et les $h\Omega'_i$ corréspondantes devraient avoir tous leurs paramétres identiques, pour que le nombre des variables indépendantes soit impair. Mais dans ce cas il s'agîrait de S_{h-1}-cônes c'est à dire du cas que nous avons déjà exclus.

D'autre part si $k > 2$, le nombre k ne peut pas être pair, parce que Ω_i et Ω'_i devraient être des fonctions linéaires d'au moins quatre d'entre elles (deux Ω_s et deux Ω'_s) et ce fait rendrait le système algébrique d'un degré supérieur au premier par rapport aux inconnues restantes, ce qui est impossible.

Il faut maintenant examiner seulement les cas $k = 1$ et $k = 0$. Pour $k = 1$ on pourra obtenir la variété base W de S_r en sectionnant la V de Segre de S_{r+1} ou un S_0-cône de S_{r+1} avec un hyperplan. Mais l'S_0-cône ne pourra être constitué que par la projection de W de S_r d'un point de S_{r+1}, et pour cela dans les deux cas il s'âgit de la même variété. Cette variété, après un bon choix de répères se réduit à la forme canonique suivante:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_5}{x_6} = \cdots = \frac{x_{r-1}}{x_r} \quad (r \text{ est un nombre pair})$$

Il s'agît d'une $S_i - V_{1+i}^{r-i}$ avec $i = (r-2)/2$, c'est à dire d'une $V_{r/2}^{(r+2)/2}$ rationnelle normale constituée (voir [2]) par les espaces $S_{(r-2)/2}$, qui s'appuyent à une conique et à des droites gauches.

Pour $k = 0$ la variété Z en S_r s'obtiendra en sectionnant une variété de Segre V du type déjà étudié, ou bien un S_1-cône de S_{r+2} (r est nombre impair).

Si $r + 2 = 7$ on obtient une variété rationnelle de S_5 different de la variété de Veronese, parce que cette dernière variété ne possède pas de points doubles appartents, et pour cela elle est la base d'un système linéaire de quadriques à Jacobienne déterminée.

Donc, la variété en question est nécessairement la variété réglée rationnelle de S_5, dont les équations canoniques sont:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5} \quad \text{ou bien:} \quad \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5}$$

Dans S_r ($r > 5$, r est un nombre impair) on obtient:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_6}{x_7} = \frac{x_8}{x_9} = \cdots = \frac{x_{r-1}}{x_r}$$

ou bien:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_4}{x_5} = \frac{x_6}{x_7} = \frac{x_8}{x_9} = \cdots = \frac{x_{r-1}}{x_r}$$

Il s'agît donc de $S_i - V_{1+i}^{r-i} (i = (r-3)/2)$ c'est à dire de variétés rationnelles normales $V_{(r-1)/2}^{(r+1)/2}$ de S_r constituées par ∞^1 $S_{(r-3)/2}$ qui s'appuyent à deux coniques ou bien à une cubique de S_3 et à des droites gauches. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bertini, *Sui sistemi lineari*, Rend. Istitut. Lombardo Milano **15** (**2**) 1880.

[2] E. Bertini, *Introduzione alla geomteria Proiettiva degli Iperspazi*, Ed. Guis. Principato, Messina, 1923, 376–378.

[3] G. Bonferroni, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare*, R. Accad. Sci. Torino **50** (1914–15), 425–438.

[4] L. Degoli, *Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indétérminée*, Stud. Sci. Math. Hungar. **17** (1982), 325–330.

[5] L. Degoli, *Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*, Collect. Math. **33** 2 (1982), 126–138.

[6] L. Degoli, *Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle*, Demonstratio Math. **3** (1983), 723–734.

[7] L. Degoli, *Alcuni teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla*, Mathematica Cluj, **26**–**49** (1984), 33–43.

[8] L. Degoli, *Un teorema sui sistemi lineari di quadriche irriducibili di prima e seconda specie* Pubbl. Départ. Math. Nouvelle série Lyon, **6/A** (1985), 1–17.

[9] L. Degoli, *Sur la caractérisrique de la Jacobienne des systèmes linéaires de quadriques*, Czech. Math. Praha, **36** (III), 1986, 476–484.

[10] L. Muracchini, *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria. Parte II*, Riv. Matem. Univ. Parma, 1952, 75–89.

[11] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, Atti R. Accad. Sci. Torino. Nota II, 51, 1916, III – 55, 1919–20, 690–714 e 480–500.

[12] S. Xambo, *On projective varieties of minimal degree*, Collect. Math. **32** (1981), 149–163.

Via Berengario 82/C
41012 Carpi (Modena)
Italia

(Reçu le 22 06 1987)