

LES REPRÉSENTATIONS IRREDUCTIBLES COMPLEXES DES GROUPES $SL(3,p)$, $PSL(3,p)$

Erhan Güzel

Résumé. Dans ce travail on obtient toutes les représentations irréductibles complexes des groupes $SL(3,p)$ et $PSL(3,p)$ définis sur le corps \mathbf{Z}_p .

1. Introduction. Les caractères irréductibles complexes des groupes $PSL(2,p)$; $SL(2,q)$, $GL(2,q)$; $GL(3,q)$, $GL(4,q)$; $GL(n,q)$; $SL(3,q)$, $PSL(3,q)$ définis sur le corps $GF(q)$ ($q = p^s$; p primitif) ont été étudiés respectivement par Frobenius [4] (1986); Schur [7], Jordan [6] (1907); Steinberg [9] (1951); Green [5] (1955); Simpson et Frame [8] (1973). Drobotenko [3, 4] a obtenu toutes les représentations irréductibles complexes des groupes $GL(3,q)$ et $GL(4,q)$ en 1967 et 1971.

2. Les Représentations Irréductibles Complexes du Groupe $SL(3,p)$.
Soit $G = SL(3,p)$, considérons les éléments suivants de G :

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient A, B, C les groupes cycliques dont les générateurs sont respectivement a, b, c . Il existe donc les sous-groupes suivants de G :

$$D = A \times B, \quad H = D, \quad C, \quad |D| = p^2, \quad |H| = p^3.$$

Le tableau des caractères irréductibles complexes du groupe H est donné par le tableau 1 [3].

Nous pouvons donner les lemmes suivants:

LEMME 1. Soit $d = (p-1, 3) = 3$, soit g un générateur du groupe multiplicatif \mathbf{Z}_p^* ; $p \equiv 1 \pmod{6}$ et soit $\mathbf{R} = \{\alpha \in \mathbf{Z}_p^* \mid \alpha = g^u, u \equiv 0 \pmod{3}\} \subseteq \mathbf{Z}_p^*$.

$(p-1)^{2/3}$ classes de type C_5 de H sont incluses respectivement dans les classes $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)*}$ de G si, et seulement si, les conditions suivantes sont respectivement vérifiées:

$$X) k \equiv t \pmod{\mathbf{R}}$$

$$Y) (k, t) \in \mathbf{R} \times g\mathbf{R}; (k, t) \in g\mathbf{R} \times g^2\mathbf{R}; (k, t) \in g^2\mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

$$Z) (k, t) \in \mathbf{R} \times g^2\mathbf{R}; (k, t) \in g\mathbf{R} \times \mathbf{R}; (k, t) \in g^2\mathbf{R} \times g\mathbf{R}.$$

$$k, t = 1, \dots, p-1$$

Classes d'équivalence de H	Représentant de la Classe	Nombre de Classes	Nombre d'éléments de la Classe	$\Psi_{h,r}; h \neq 0$	$\Psi_{m,n}$
				$\varepsilon^p = 1;$ $h, r = 0, \dots, p-1$	$\varepsilon^p = 1;$ $m, n = 0, \dots, p-1$
C_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	1	p	1
C_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	1	pe^{kh}	1
C_3	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	p	0	ε^{km}
C_4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	p	0	ε^{tn}
C_5	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$(p-1)^2$	p	0	ε^{km+tn}

LEMME 2. Soit $d = 3$, soient $x, y \in \{1, \dots, p-1\}$; $x \equiv g^u \pmod{p}$, $y \equiv g^v \pmod{p}$

1) Si $x \equiv y \pmod{p}$ et $u \equiv v \pmod{3}$, le nombre de couples (x, y) solutions de la congruence $x + y \equiv 0 \pmod{p}$ est $p-1$.

2) Le nombre de couples (x, y) solutions de la congruence $x + y \equiv 1 \pmod{p}$ est $p-2$.

*[1] $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}$ sont les classes d'équivalence dont les représentants sont respectivement

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & g & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & g^2 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Si $u \equiv v \pmod{3}$, le nombre de couples (x, y) solutions de la congruence $x + y \equiv 1 \pmod{p}$ est $(p-4)/3$.

4) Si $u \equiv v \pmod{3}$, le nombre de couples $(x, y) = (y, x)$ solutions de la congruence $x + y \equiv 1 \pmod{p}$ est $(p-1)/3$.

5) Dans les cas 2), 3), 4) en replaçant la congruence $x + y \equiv 1 \pmod{p}$ par la congruence $x + y \equiv g^i \pmod{p}$ ($i = 1, \dots, p-1$) le nombre de couples (x, y) solutions ne change pas.

Considérons maintenant les caractères irréductibles complexes du groupe $G = SL(3, p)$ [8]:

$$d = 1, 3, \xi_i^{(j)}; j = 1, \dots, 11, i = 1, \dots, t_j;$$

$$t_1 = t_2 = t_4 = 1, t_3 = t_5 = p-2, t_6 = [(p-1)(p-4) + 3 - d]/6, t_7 = p(p-1)/2,$$

$$t_8 = (p^2 + p + p + 1 - d)/3, t_9 = t_{10} = t_{11} = (d-1)3/2.$$

Soit $\xi_{iH}^{(j)} = \xi^{(j)}$. Les valeurs de $\xi^{(j)}$ sur les classes de H sont données par le tableau 2.

Soit $\beta = \varepsilon^{km+tn}, \varepsilon^p = 1; k, t, m, n = 1, \dots, p-1$. Si le couple (k, t) vérifie la condition X (ou Y ou Z), nous écrivons $(k, t) \in X$ (ou $\in Y$ ou $\in Z$). Soient

$$x = \sum_{(k,t) \in X} \beta, \quad y = \sum_{(k,t) \in Y} \beta, \quad z = \sum_{(k,t) \in Z} \beta$$

Si $d = 3$, nous pouvons trouver le nombre de fois que $\xi_i^{(j)}$ ($j = 9, 10, 11; i = 0, 1, 2$) est contenu dans le caractère induit $\psi_{m,n}^G$:

D'après le tableau 1. le tableau 2, le théorème de Frobenius et le lemme 1:

$$(\psi_{m,n}^G \xi_i^{(j)} = p^{-3}[(p^3 - p)/3 + (p\delta_{oh} - (p-1)/3)px + (p\delta_{1h} - (p-1)/3)py + (p\delta_{2h} - (p-1)/3)pz]^{(*)})$$

Si nous prenons $m \equiv g^u \pmod{p}$ et $n \equiv g^v \pmod{p}$, d'après le lemme 2

$$u \equiv v \pmod{3} \quad \Rightarrow x = (2p+1)/3, \quad y = z = -(p-1)/3$$

$$(u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)^{(*)} \Rightarrow x = z = -(p-1)/3, \quad y = (2p+1)/3$$

$$(u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0) \Rightarrow x = y = -(p-1)/3, \quad z = (2p+1)/3$$

Ainsi, la décomposition de $\xi^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 11$) en somme de caractères irréductibles de H peut s'écrire comme ci dessous:

$$d = 1, 3$$

$$\xi^{(1)} = \psi \quad \xi^{(6)} = (p+2)S_3 + 3S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + 6\psi$$

$$(1) \quad \xi^{(2)} = S_3 + S_4 + 2\psi \quad \xi^{(7)} = pS_3 + S_4 + S_0 + S_1 + S_2$$

$$(*)\delta_{ih} = \begin{cases} 1; & i = h \\ 0; & i \neq h \end{cases}$$

$$(*) (u, v) \equiv_3 (a, b) \Leftrightarrow u \equiv a \pmod{3}, v \equiv b \pmod{3}$$

Class d'équivalence de H	Représentant de la Classe	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$	$\xi^{(4)}$	$\xi^{(5)}$	$\xi^{(6)}$	$\xi^{(7)}$	$\xi^{(8)}$	$\xi^{(9)}$	$\xi^{(10)}$	$\xi^{(11)}$
C_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	$p(p+1)$	p^2+p+1	p^3	$p(p^2+p+1)$	$\frac{(p+1) \times (p^2+p+1)}{(p^2+p+1)}$	$\frac{(p-1) \times (p^2+p+1)}{(p^2+p+1)}$	$\frac{(p-1)^2 \times (p+1)}{(p+1)}$	$\frac{(p+1) \times (p-1)^2 \times (p+1)}{(p+1)^3}$	$\frac{(p-1)^2 \times (p+1)}{(p+1)^3}$	$\frac{(p-1)^2 \times (p+1)}{(p+1)^3}$
C_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_3	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_5	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & r & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	1	0	0	1	-1	1	$\frac{p \delta_{ih}}{-(p-1)^3}$	$\frac{p \delta_{ih}}{(p-1)^3}$	$\frac{p \delta_{ih}}{-(p-1)^3}$

$i, h=0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
\xi^{(3)} &= S_3 + S_4 + 3\psi & \xi^{(8)} &= (p-1)S_3 + S_0 + S_1 + S_2 \\
\xi^{(4)} &= pS_3 + S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + \psi & \xi_{iH}^{(9)} &= (p-1)/3 \cdot S_3 + S_4 + S_i + 3\psi; \\
& & & \quad ; i = 0, 1, 2 \\
\xi^{(5)} &= (p+1)S_3 + 2S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + 3\psi & \xi_{iH}^{(10)} = \xi_{iH}^{(11)} &= (p-1)/3 \cdot S_3 + S_i
\end{aligned}$$

Ici

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_{0,0} \\
S_0 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; & u &\equiv v \pmod{3} \\
S_1 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; & (u, v) &\equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1) \\
S_2 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; & (u, v) &\equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0) \\
S_3 &= \sum_{i=1}^{p-1} \Phi_i^H; & S_4 &= \sum_{m,n} (\psi_{m,n} + \psi_{0,n}) \\
& & (m, n) &= 1, \dots, p-1; m \equiv g^u \pmod{p}, n \equiv g^v \pmod{p}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Frobenius et (1):

$$\begin{aligned}
& d = 1, 3 \\
\psi_{m,0}^G &= \psi_{0,n}^G = \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{t_3} \xi_i^{(3)} + \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + 2 \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + 3 \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \\
(2) \quad & + \left(\frac{d-1}{2} \right) \sum_{i=1}^2 \xi_i^{(9)} \\
\xi_{m,n}^G &= \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \left(\frac{d-1}{2} \right) \sum_{j=9}^{11} \xi_0^{(j)}; \\
& u \equiv v \pmod{3} \\
\xi_{m,n}^G &= \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \left(\frac{d-1}{2} \right) \sum_{j=9}^{11} \xi_1^{(j)}; \\
& (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1) \\
\psi_{m,n}^G &= \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \left(\frac{d-1}{2} \right) \sum_{j=9}^{11} \xi_2^{(j)}; \\
& (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0) \\
& (m, n = 1, \dots, p-1; m \equiv g^u \pmod{p}, n \equiv g^v \pmod{p})
\end{aligned}$$

Soit $M_i^{(j)}$ le KG modul(*) irréductible de caractère $\xi_i^{(j)}$ et soit $M_{m,n}$ le KG -modul de caractère $\psi_{m,n}^G$. D'après (2):

$$(3) \quad \begin{aligned} & d = 1, 3 \\ M_{m,0} = M_{0,n} &= \sum_{i=1}^{t_2} M_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{t_3} M_i^{(3)} + \sum_{i=1}^{t_4} M_i^{(4)} + 2 \sum_{i=1}^{t_5} M_i^{(5)} + 3 \sum_{i=1}^{t_6} M_i^{(6)} + \\ & + \sum_{i=1}^{t_7} M_i^{(7)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{i=0}^2 M_i^{(9)} \end{aligned}$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^8 \sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{j=9}^{11} M_0^{(j)}; \quad u \equiv v \pmod{3}$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^8 \sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{j=9}^{11} M_1^{(j)}; \quad (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^8 \sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{j=9}^{11} M_2^{(j)}; \quad (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0)$$

$$(m, n = 1, \dots, p-1; \quad m \equiv g^u \pmod{p}, \quad n \equiv g^v \pmod{p})$$

Si $\xi_i^{(j)}(1) = n_i^{(j)}$, $e_i^{(j)} = n_i^{(j)} |G|^{-1} \sum_{a \in G} \xi_i^{(j)}(a^{-1})a$ est l'idempotente centrale de KG . D'après (3):

$$(4) \quad \begin{aligned} & d = 1, 3 \\ & e_j^{(j)} M_{m,0} = e_i^{(j)} M_{0,n} = M_i^{(j)}; \quad j = 2, 3, \quad i = 1, \dots, t_j \\ & e_i^{(j)} M_{m,n} = M_i^{(j)}; \quad j = 4, \dots, 8, \quad i = 1, \dots, t_j \\ & e_0^{(j)} M_{m,n} = M_0^{(j)}; \quad j = 9, 10, 11; \quad u \equiv v \pmod{3} \\ & e_1^{(j)} M_{m,n} = M_1^{(j)}; \quad j = 9, 10, 11; \quad (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1) \\ & e_2^{(j)} M_{m,n} = M_2^{(j)}; \quad j = 9, 10, 11; \quad (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0) \\ & (m, n = 1, \dots, p-1; \quad m \equiv g^u \pmod{p}, \quad n \equiv g^v \pmod{p}). \end{aligned}$$

Si $e_{m,n}$ est l'idempotente centrale du caractère $\psi_{m,n}$ de H , on a $M_{m,n} = \mathbf{K}Ge_{m,n}$. Alors, d'après (4):

$$(5) \quad \begin{aligned} & d = 1, 3 \\ & M_i^{(j)} = \mathbf{K}Ge_i^{(j)} e_{m,0}; \quad j = 2, 3, \quad i = 1, \dots, t_j \\ & M_i^{(j)} = \mathbf{K}Ge_i^{(j)} e_{0,n}; \quad j = 4, \dots, 8, \quad i = 1, \dots, t_j \\ & M_0^{(j)} = \mathbf{K}Ge_0^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, \quad u \equiv v \pmod{3} \end{aligned}$$

(*) K est le corps des nombres complexes

$$M_1^{(j)} = \mathbf{K}G e_1^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)$$

$$M_2^{(j)} = \mathbf{K}G e_2^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0)$$

$$(m, n = 1, \dots, p-1; \quad m \equiv g^u \pmod{p}, \quad n \equiv g^v \pmod{p})$$

Ainsi, on a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME. *Le $\mathbf{K}G$ -modul du caractère irréductible $\xi_i^{(j)}$ du groupe $G = SL(3, p)$ est comme ci-dessous:*

$$d = 1, 3$$

$$\mathbf{K}G e_i^{(j)} e_{m,0} = \mathbf{K}G e_i^{(j)} e_{0,n}; \quad j = 2, 3, \quad i = 1, \dots, t_j$$

$$\mathbf{K}G e_i^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 4, \dots, 8, \quad i = 1, \dots, t_j$$

$$\mathbf{K}G e_0^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, \quad u \equiv v \pmod{3}$$

$$\mathbf{K}G e_1^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, \quad (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)$$

$$\mathbf{K}G e_2^{(j)} e_{m,n}; \quad j = 9, 10, 11, \quad (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0)$$

$$(m, n = 1, \dots, p-1; \quad m \equiv g^u \pmod{p}, \quad n \equiv g^v \pmod{p})$$

3. Les Représentations Irréductibles Complexes du Groupe

$PSL(3, p)$. Si nous écrivons $G = SL(3, p)$ et $PG = PSL(3, p)$, nous avons $PG = G/Z(G)$.(*) Les caractères irréductibles $\xi_i^{(j)}$ du groupe G qui verifiant la condition suivante sont les caractères irréductibles du groupe PG :

$$\xi_i^{(j)}(a) = \xi_i^{(j)}(1); \quad a \in Z(G).$$

Alors, les caractères irréductibles du groupe $PSL(3, p)$ sont comme ci-dessous [8]:

$$d = 1, 3, \xi_i^{(j)}; \quad j = 1, \dots, 9, \quad i = 1, \dots, t'_j;$$

$$t'_1 = t'_2 = t'_4 = 1, \quad t'_3 = t'_5 = (p-4)/3, \quad t'_6 = (p^2 - 5p + 4)/18,$$

$$t'_7 = [p^2 - p + 3(d-3)]/6, \quad t'_8 = (p^2 + p - 2)/9, \quad t'_9 = (d-1)3/2$$

D'autre part, pour le groupe H considéré à § 2, $H \cap Z(G) = \{I\}$. Le groupe H est donc isomorphe à un sous-groupe de PG .

Alors, si nous prenons PG au lieu de G , pour $j = 2, \dots, 9$ (1), (2), (3), (4), (5) et le théorème ne changent pas.

REFERENCES

- [1] L. Dickson, *Linear Groups*, Dover, New York, 1958.
- [2] E. S. Drobotenko, *Irreducible complex representations of the group $GL(3, q)$* , Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR. Ser. A (1967), 104–109.

(*) $Z(G)$ est le centre du groupe G

- [3] E. S. Drobotenko, *Irreducible complex representations of the group $GL(4, q)$* , Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR. Ser. A (1971), 397–399, 476.
- [4] G. Frobenius, *Über Gruppen Charactere*, Berliner Sitz. 1896.
- [5] J. A. Green, *Characters of the finite general groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 407–477.
- [6] H. Jordan, *Group-characters of various types of linear groups*, Amer. J. Math. **29** (1907), 397.
- [7] I. Schur, *Untersuchungen Über die Darstellung der Endlichen Gruppen durch Gebrochene Lineare Substitutionen*, J. für Math. **132** (1907), 85.
- [8] W. A. Simpson and J. S. Frame, *The character tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q^2)$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q^2)$* , Cand. J. Math. **25** (1973), 486–494.
- [9] R. Steinberg, *The representations of $GL(3, q)$, $GL(4, q)$, $PGL(3, q)$ and $PGL(4, q)$* , Cand. J. Math. **3** (1951), 225–235.

Department de Mathématiques
Université d' Istambul
34459 Vezneciler, Istambul
Turquie

(Received 25. 02. 1987)