

## ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИВАНОВА ОТНОСЯЩЕСЯ НЕЛИНЕЙНЫМ КВАЗИ-СЖИМАЮЩИМ ОТОБРАЖЕНИЯМ

Любомир Чирич

А. А. Ивановым в [2] доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА [2, стр. 43]. Пусть  $(X, d)$  полное метрическое пространство,  $T: X \rightarrow X$  такое отображение, что

- 1°  $\omega(r) < r$ , для  $r > 0$ :      3°  $\omega(r)$  неубывающая функция;  
4°  $\lim_{r \rightarrow \infty} [r - \omega(r)] = +\infty$ .

Тогда существует единственная неподвижная точка  $\xi$  отображения  $T$  и  $\lim_n T^n x = \xi$  для любой точки  $x \in X$ .

Заметим что если в 1°  $\omega(r) = k \cdot r$ , где  $0 < k < 1$ , когда  $T$  называется квази-сжимающим отображением [1].

В связи с свойствами 3° и 4° функции  $\omega(r)$  Иванов замечает [2, стр. 45]:

*Замечание.* “Мне неизвестно, является ли условия неубывания функции  $\omega$  и условие  $r - \omega(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$  существенными в формулировке доказанной теоремы или же от них можно освободиться. Так как эти условия довольно обременительны, то желательно либо построить примеры, показывающие их существенность, либо найти не использующее эти условия доказательство соответствующей теоремы”.

Здесь мы построим два примера. Пример 1 показывает что условие 3° существенно, а пример 2 показывает что и условие 4° существенно.

*Пример 1.* Пусть  $X = (0, +\infty)$  с обычной метрикой ( $d(x, y) = |x - y|$ ) функция  $\omega$  определена соотношением

$$\omega(r) = \begin{cases} r/2, & r \in [0, 1), \\ r - 1/2, & r \in [1, +\infty) \end{cases}$$

и для отображения  $T : X \rightarrow X$ ,  $Tx = x + 1$ .

Покажем что для отображения  $T$  выполнено условие 1°. Пусть, для определенности,  $x < y$ . Тогда

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) < [d(x, y) + 1] - 1/2 = \omega[d(Tx, Ty)].$$

Так как функция  $\omega$  непрерывна, возрастающая и  $\omega(r) < r$ , то в этом примере выполняются все условия 4°, а отображение  $T$  не имеет неподвижной точки.

*Пример 2.* Пусть  $X = ]0, +\infty)$  с метрикой определенной соотношением

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (d(x, y) = |x - y|),$$

функция  $\omega$  определена отношением

$$\omega(r) = \begin{cases} r/2, & r \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty, \\ r - 1^2, & r \in [1/2, +1) \end{cases}$$

и для отображения  $T : X \rightarrow X$ ,  $Tx = x + 1$ .

Тогда функция  $\omega$  полунепрерывна справа,  $\omega(r) < r$ ,  $\lim_r [r - \omega(r)] = +\infty$ , но  $\omega$  не является неубывающей функцией. Напомним что  $(X, \delta)$  есть полное пространство.

Покажем теперь что для отображения  $T$  выполнено условие 1°. Пусть, для определенности,  $x < y$ . Положим  $d(x, y) = r$ . Тогда

$$\delta(Tx, Ty) = \delta(x, y) = \frac{r}{1+r}, \quad \omega[\delta(x, Ty)] = \frac{1+r}{2+r} - \left(1 - \frac{1+r}{2+r}\right)^2.$$

Так как  $\frac{r}{1+r} < \frac{1+r}{2+r} - \left(1 - \frac{1+r}{2+r}\right)^2$  то  $\delta(Tx, Ty) < \omega[\delta(x, Ty)]$ .

Таким образом, в построенном здесь примере выполняются все условия данной теоремы кроме условия неубывания функции  $\omega$ , а отображение  $T$  не имеет неподвижной точки.

*Замечание.* Напомним здесь что Иванов в [2, стр. 33] для теоремы, в которой условие 1° заменено следующим условием:

$$1^\circ \quad d(T^{n(x)}x, T^{n(y)}y) \leq \omega[d(x, y)]$$

построил пример (стр. 32–33) который показывает, что условие 4° является существенным условием в этой теореме, а также построил и пример (стр. 37–40) который показывает, что и условие 3° является существенным условием в этой теореме.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Чирич, *A generalization of Banach's contraction principle*; Проз. Амер. Матх. Соц. **45** (1974), 267–273.
- [2] А.А. Иванов, *Неподвижные точки отображений метрических пространств, Исследования по топологии*, II Наука, Ленинград, 1976, стр. 5–102.

(Поступила 27 05 1985)