PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 41 (55), 1987, pp. 53–61

ГРУППЫ ПРОСТОЙ И КРАТНОЙ АНТИСИММЕТРИИ ЛЕНТ

Славик Яблан

Резюме. Воспроизведены новым методом известные по статьям [1, 2, 4] группы простой и кратной антисимметрии лент типа M^m непосредственно из групп симетрии лент и произведена частичная каталогизация полученных групп типа M^m.

Группы простой и кратной антисимметрии лент подробно расмотрнны в работах [1, 2, 4, 5]. Вывод групп антисимметрии лент типа M^1 осуществлен непосредственно из групп симметрии лент, применяя шубниковский метод [1], тогда как вывод групп кратной антисимметрии лент типа M^m [4, 5] осуществлен непосредственным применением групп простой и кратной антисимметрии бордюров.

В настоящей работе предлагаетця вывод групп простой и кратной антисимметрии лент обобщеным методом Шубникова-Заморзаева, опираясь на использование антисимметрических характеристик групп симметрии [6]. Приведенные в первой части статьи антисимметрические характеристики групп симметрии лент служили основной вывода групп простой и кратной антисимметрии лент. Принимая во внимание объемность полученых результатов, во второй части работы вместо полной каталогизации представлена частичная каталогизация групп простой и кратной антисимметрии лент типа M^m, в соответствии с методом [7].

1. Группы симметрии лент, их копредставления и антисимметрические характеристики

Трыдцать одну группу симметрии лент приведем в виде каталожного обзора, в котором для каждой группы симметрии лент указанны: международный символ, перечень образующих, копредставление и антисимметрическая характеристика. Некторые из групп симметрии лент представлены с помощью двух или трех различных копредставлений. Семь первых представляют собой группы симметрии бордюров.

AMS Subject Classification (1980): Primary 20H15.

p1 образуемая переносом X:
$\{X\}$ $AK:\{X\}$

p1a1 образуемая скользящим отражением P:
$\{P\}$ $AK:\{P\}$

p112 а) образуемая переносом X и вращением порядка $2T$:
$\{X,T\}$ $T^2=(T_1X)^2=E$ $AK:\{T,TX\}$
б) образуемая вращениями порядка $2T$, T_1:
$\{T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=E$ $AK:\{T,T_1\}$

p1m1 образуемая переносом X и отражением R:
$\{X,R\}$ $XR=RX$ $R^2=E$ $AK:\{X\}\{R\}$

pm11 а) образуемая переносом X и отражением R_1:
$\{X,R_1\}$ $R_1^2=(R_1X)^2=E$ $AK:\{R_1,R_1,X\}$
б) образуемая отражениями R_1, и R_2:
$\{R_1,R_2\}$ $R_1^2=R_2^2=E$ $AK:\{R_1,R_2\}$

pma2 а) образуемая скользящим отражением P и отражением R_1:
$\{P,R_1\}$ $R_1^2=(PR_1)^2=E$ $AK:\{P\},\{R_1\}$
б) образуемая отражением R_1, и вращением порядка $2T$:
$\{R_1,T\}$ $R_1^2=T^2=E$ $AK:\{R_1,T\}$

pmm2 а) образуемая переносом X и отражениями R R_1:
$\{X,R,R_1\}$ $R^2=R_1^2=(R_1X)^2=E$ $XR=RX$ $RR_1=R_1R$ $AK:\{R\}\{R_1,R_1,X\}$
б) образуемая отражениями R, R_1 R_2:
$\{R,R_1,R_2\}$ $R^2=R_1^2=R_2^2=E$ $RR_1=R_1R$ $RR_2=R_2R$ $AK:\{R\}\{R_1,R_2\}$

p121 а) образуемая переносом X и вращением порядка $2T$:
$\{X,T\}$ $T^2=(TX)^2=E$ $AK:\{T,TX\}$
б) образуемая вращениями порядка $2T$, T_1:
$\{T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=E$ $AK:\{T,T_1\}$

p12$_1$22 а) образуемая винтовым движением S и вращением порядка $2T$:
$\{S,T\}$ $T^2=(ST)^2=E$ $AK:\{S\}\{T\}$
б) образуемая вращениями порядка $2T$, T_1:
$\{T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=E$ $AK:\{T\}\{T_1\}$

p2$_1$ma образуемая винтовым движением S и отражением R:
$\{S,R\}$ $R^2=(SR)^2=E$ $AK:\{S\}\{R\}$

p$\mathbf{\frac{2_1}{m}}$11 образуемая винтовым движением S и отражением R_1:
$\{S,R_1\}$ $R_1^2=(SR_1)^2=E$ $AK:\{S\}\{R\}$

p11$\mathbf{\frac{2}{a}}$ образуемая скользящим отражением P и вращением порядка $2T$:
$\{P,T\}$ $T^2=(PT)^2=E$ $AK:\{P\}\{T\}$

pm2m а) образуемая переносом X и отражениями R R_1:
$\{X,R,R_1\}$ $(XR_1)^2$ $R^2=R_1^2=(RR_1)^2=E$ $XR=RX$ $AK:\{R\}\{R_1,R_1,X\}$
б) образуемая отражениями R, R_1 R_2:
$\{R,R_1,R_2\}$ $R^2=R_1^2=R_2^2=(RR_1)^2=(RR_2)^2=E$ $AK:\{R\}\{R_1,R_2\}$

pm2a а) образуемая скользящим отражением P и вращением порядка $2T$:
$\{P,T\}$ $T^2=(PT)^2=E$ $AK:\{P\},\{T\}$
б) образуемая вращением порядка $2T$ и отражением R_1:
$\{T,R_1\}$ $T^2=R_1^2=E$ $AK:\{T\}\{R_1\}$

p211 образуемая переносом X:
$\{X,T\}$ $T^2=E$ $TX=XT$ $AK:\{X\}\{T\}$

p$\overline{1}$ а) образуемая переносом X и центральной симметрией Z:
$\{X,Z\}$ $Z^2=(ZX)^2=E$ $AK:\{Z,Z_1\}$
б) образуемая центральными симмертриями Z,Z_1:
$\{Z,Z_1\}$ $Z^2=Z_1^2=E$ $AK:\{Z,Z_1\}$

p2mm а) образуемая переносом X и отражениями R и R_1:
$\{X,R,R_1\}$ $R^2=(R_1X)^2=(RR_1)^2=E$ $XR=RX$ $XR_1=R_1X$ $AK:$ $\{X\}\{R\}\{R_1\}$
б) образуемая переносом X отражением R и вращением порядка $2T$:
$\{X,R,T\}$ $T^2=R^2=(TR)^2=E$ $XR=RX$ $XT=TX$ $AK:\{X\}\{R\}\{T\}$

p2aa а) скользящим отражением P и вращением порядка $2T$:
$\{P,T\}$ $T^2=E$ $PT=TP$ $AK:\{P\}\{T\}$
б) образуемая скользящим отражениями P, Q:
$\{P,Q\}$ $P^2=Q^2E$ $PQ=QP$ $AK:\{P\}\{Q\}$

p11$\frac{2}{m}$ а) образуемая переносом X отражением R и вращением порядка $2T$:
$\{X,R,T\}$ $R^2=T^2=(RT)^2=E$ $XR=RX$ $(TX)^2=E$ $AK:\{R\}\{T,TX\}$
б) образуемая отражением R и вращением порядка $2T$:
$\{R,T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=(RT)^2=(RT_1)^2=R^2=E$ $AK:\{R\}\{T,T_1\}$
в) образуемая отражением R и центральными симметриями Z,Z_1:
$\{R,Z,Z_1\}$ $Z^2=Z_1^2=(RZ)^2=(RZ_1)^2=R^2=E$ $AK:\{R\}\{Z,Z_1\}$

pmmm а) образуемая переносом X и отражениями R, R_1 и R_2:
$\{X,R,R_1,R_2\}$ $R^2=R_1^2=R_2^2=(RR_1)^2=(R_1R_2)^2=(R_2R)^2=E$ $XR=RX$
$XR=RX$ $XR_1=R_1X$ $(XR_2)^2=E$ $AK:\{R\}\{R_1\}\{R_2,XR_2\}$
б) образуемая отражениями R,R_1,R_2,R_3:
$\{R,R_1,R_2,R_3\}$ $R^2=R_1^2=R_2^2=R_3^2=(RR_1)^2=$
$(R_1R_2)^2=(R_1R_3)^2=E$ $AK:\{R\}\{R_1\}\{R_2,R_3\}$

pmaa а) образуемая скользящими отражениями P, Q и отражением R:
$\{P,Q,R_1\}$ $R_1^2=(RR_1)^2=(QR_1)^2=E$ $P^2=Q^2$ $PQ=QP$ $AK:\{P\}\{Q\}\{R_1\}$
б) образуемая отражением R_1 и вращениями порядка $2T,T_1$:
$\{R_1,T,T_1\}$ $R_1^2=T^2=T_1^2=E$ $TR_1T=T_1R_1T_1$ $TR_1T_1=T_1R_1T$ $AK:$ $\{R_1\}\{T\}\{T_1\}$

pmma а) образуемая отражениями R,R_1 и скользящим отражением P:
$\{R,R_1,P\}$ $R^2=R_1^2=(RR_1)^2=(PR_1)^2=E$ $PR=RP$ $AK:\{P\}\{R\}\{R_1\}$
б) образуемая скользящим отражением порядка $2T,T_1$:
$\{P,T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=(T_1P)^2=(T_1PT)^2=E$ $AK:\{P\}\{T\}\{T_1\}$

p2$_1$11 образуемая винтовым движением S:
$\{S\}$ $AK:\{S\}$

p222 а) образуемая вращениями порядка $\{2T,T_1T_2\}$:
$\{T,T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=T_2^2=(TT_1)^2=(T_2TT_2T_1)^2=E$ $AK:\{T_2\}\{T,T_1\}$
б) образуемая переносом X и вращением порядка $2T,T_1$:
$\{X,T,T_1\}$ $T^2=T_1^2=(TT_1)^2=E$ $(TX)^2=(T_1X)^2=E$ $AK:\{PX\}\{T,T_1\}$

p11m образуемая переносом X и отражением R:
$\{X, R\}$ $R^2 = E$ $XR = RX$ $AK : \{X\}\{R\}$

p11a образуемая скользящим отражением P:
$\{P\}$ $AK : \{P\}$

p2$_1$am образуемая скользящим отражением P и отражением R:
$\{P, R\}$ $R^2 = E$ $PR = RP$ $AK : \{P\}\{R\}$

p$\frac{2}{m}$11 а) образуемая переносом X отражением R_1 и вращением порядка $2T$:
$\{X, R_1, T\}$ $R_1^2 = (R_1X)^2 = T^2 = (TR_1)^2 = E$
$XT = TX$ $(TX)^2 = E$ $AK : \{T\}\{R_1, R_1X\}$
б) образуемая отражением R_1 и вращением порядка $2T, T_1$:
$\{R_1, T, T_1\}$ $T^2 = T_1^2 = R_1^2 = (TR_1)^2 = (T_1R_1)^2 = E$ $AK : \{R_1\}\{T, T_1\}$

p1$\frac{2}{m}$1 а) образуемая переносом X отражением R и вращением порядка $2T$:
$\{X, R, T\}$ $T^2 = (TX)^2 = R^2 = (TR)^2 = E$ $XR = RX$ $AK : \{R\}\{T, TX\}$
б) образуемая отражением R и вращением порядка $2T, T_1$:
$\{R, T, T_1\}$ $R^2 = T^2 = T_1^2 = (TR)^2 = (T_1R)^2 = E$ $AK : \{R\}\{T, T_1\}$

p1$\frac{2}{a}$1 а) образуемая скользящим отражением P и вращением порядка $2T$:
$\{P, T\}$ $T^2 = (PT)^2 = E$ $AK : \{P\}\{T\}$
б) образуемая вращением порядка $2T$ и центральной симетрией Z:
$\{T, Z\}$ $T^2 = Z^2 = E$ $AK : \{T\}\{Z\}$

pmam а) образуемая скользящим отражением P и отражениями R, R_1:
$\{P, R, R_1\}$ $R^2 = R_1^2 = (RR_1)^2 = (PR_1)^2 = E$ $PR = RP$ $AK : \{P\}\{R\}\{R_1\}$
б) образуемая вращением порядка $2T$ и отражениями R, R_1:
$\{T, R, R_1\}$ $T^2 = R^2 = R_1^2 = (RR_1)^2 = (TR)^2 = E$ $AK : \{T\}\{R\}\{R_1\}$

Поскольку из групп симметрии с изоморфными антисимметрическими характеристиками выводится одно и то же число групп простой и кратной антисимметрии типа M^m при каждом фиксированном m и полученные группы одинакови по структуре между собой, интересен только вывод групп простой и кратной антисимметрии типа M^m из групп симметрии с неизоморфными антисимметрическими характеристиками. Соответственно соотнешению изоморфизма антисимметрических характеристик группы симметрии лент можно разделить на шесть классов эквивалентности:

1. **p1**, $p1a1$, $p2_111$, $p11a$
2. **p2$_1$22**, $p1m1$, $p2_1ma$, $p\frac{2_1}{m}11$, $p11\frac{2}{a}$, $pm2a$, $p211$, $p2aa$, $p11m$, $p2_1am$, $p1\frac{2}{a}1$
3. **pm2m**, $p11\frac{2}{m}$, $p222$, $p\frac{2}{m}11$, $p1\frac{2}{m}1$, $p1\frac{2}{a}1$
4. **p121**, $p112$, $p\overline{1}$, $pm11$
5. **p2mm**, $pmaa$, $pmma$, $pmam$
6. **pmmm**

1. Частичный каталог групп простой и кратной антисимметрии лент типа M^m

Вывод групп простой и кратной антисимметрии лент типа M^m сводится таким образом к процесу вывода из групп симметрии – представителей классов 1–6), т.е. из групп 1.) $p1$, 2.) $p2_122$, 3.) $pm2m$, 4.) $p121$ 5.) $p2mm$, 6.) $pmmm$. Вывод групп простой и кратной антисимметрии типа m^m в рамках классов 1.), 2.), 5.), т.е. из групп симметрии $p1$, $p2_122$, $p2mm$ осуществляется тривиально, иключительно при соблюдении условия независимости антитождеств $e_1, e_2, \ldots, e_m$ [6, Теорема 1. б], следовательно процесс вывода необходимо осуществить только в рамках классов 3.), 4.) 6.), т.е. из групп симметрии $pm2m$, $p121$, $pmmm$.

Соответственно методу частичной каталогизации групп простой и кратной антисимметрии типа M^m [7] приведем частичний каталог групп простой и кратной антисимметрии, выводимых из групп $pm2m$, $p121$, $pmmm$. Втабличном обзоре приведем по порядку: порождающую группу симметрии, множество образующих, антисимметрическую характеристику AK и антисимметрические характеристики $AK^m(^mAK)^*$ групп типа $M^m(^mM)$, образующие частичний каталог, причем возле каждой из таких групп указан тип группы $M^m(^mM)$ и тип антисимметрической характеристики AK^m.

pm2m	$\{R, R_1, R_2\}$		$AK : \{R\}\{R_1, R_2\}$
$m = 1$	$\{e_1\}\{E, E\}$	M^1	$(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{e_1, e_1\}$	M^1	$(2)\,(3)^1$
	$\{e_1\}\{e_1, e_1\}$	M^1	$(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{E, e_1\}$	M^1	$(2)\,(4)^1$
	$\{e_1\}\{E, e_1\}$	M^1	$(2)\,(4)^1$
$m = 2$	$\underline{\{e_1\}\{E, E\}}$		
	$\{e_1\}\{e_2, e_2\}$	M^2	$(2)\,(3)^2$
	$\{e_1e_2\}\{e_2, e_2\}$	M^2	$(2)\,(3)^2$
	$\{e_1\}\{E, e_2\}$	M^2	$(2)\,(4)^2$
	$\{e_1e_2\}\{E, e_2\}$	M^2	$(2)\,(4)^2$
	$\{e_1e_2\}\{E, E\}$	^2M	
	$(2)\,(4)^2 \to 6M^2$		
$m = 2$	$\underline{\{e_1\}\{e_2, e_2\}}^{+*}$		
	$\{e_1\}\{e_2, e_2e_3\}$	M^3	
	$\{e_1e_3\}\{e_2e_3, e_2e_3\}$	^3M	
	$(2)\,(4)^2 \to 4M^3$		
	$N_1(pm2m) = 5$	$N_2(pm2m) = 2\mathbf{6} + 3\mathbf{4} = 24$	$N_3(pm2m) = 18\mathbf{4} + 6\mathbf{2} = 84$

*С целю сокращенного обозначения. в рамках антисимметрических характеристик $AK^m(^mAK)$ приводим только антитождеств, соответствующие антиобразу-ющим

^{0}Случай когда нет необходимости в приведении групп типа ^mM, т.к. нет преобразования $E \leftrightarrow e^+$ где e^+ –произведение антитождеств $e_1, e_2, \ldots, e_m$ [7] или когда расматри ваемая группа является единственной в классе эквивалентности, определенном соотношением одинаковости типа AK^m, обозначены знаком $^+$.

p121	$\{T,T_1\}$		$AK:\{T,T_1,\}$
$m=1$	$\{E,e_1\}$	M^1	$(4)^1$
	$\{e_1,e_1\}$	M^1	$(3)^1$
$m=3$	$\underline{\{e_1,e_1\}^+}$		
	$\{e_1,e_1e_2\}$	M^2	
	$(4)^1\rightarrow 2M^2$		
pmmm	$\{R,R_1,R_2,R_3\}$		$AK:\{R\}\{R_1\}\{R_2,R_3\}$
$m=1$	$\{e_1\}\{E\}\{E,E\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{e_1\}\{E,E\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{e_1\}\{e_1\}\{E,E\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{E\}\{e_1,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{e_1\}\{E\}\{e_1,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{e_1\}\{e_1,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{e_1\}\{e_1\}\{e_1,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(3)^1$
	$\{E\}\{E\}\{E,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(4)^1$
	$\{e_1\}\{E\}\{E,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(4)^1$
	$\{E\}\{e_1\}\{E,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(4)^1$
	$\{e_1\}\{e_1\}\{E,e_1\}$	M^1	$(2)\,(2)\,(4)^1$
$m=2$	$\underline{\{\mathbf{e_1}\}\{\mathbf{E}\}\{\mathbf{E},\mathbf{E}\}}$		
	$\{e_1\}\{e_2\}\{E,E\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1e_2\}\{e_2\}\{E,E\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1\}\{E\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1e_2\}\{E\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1\}\{e_2\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1e_2\}\{e_2\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(3)^2$
	$\{e_1\}\{E\}\{E,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(4)^2$
	$\{e_1e_2\}\{E\}\{E,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(4)^2$
	$\{e_1\}\{e_2\}\{E,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(4)^2$
	$\{e_1e_2\}\{e_2\}\{E,e_2\}$	M^2	$(2)\,(2)\,(4)^2$
	$\{e_1e_2\}\{E\}\{E,E\}$	${}^2M$	
	$(2)\,(2)\,(4)^1\rightarrow 14M^2$		
$m=3$	$\underline{\{\mathbf{e_1}\}\{\mathbf{e_2}\}\{\mathbf{E},\mathbf{E}\}}$		
	$\{e_1\}\{e_2\}\{e_3,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(3)^3$
	$\{e_1e_3\}\{e_2\}\{e_3,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(3)^3$
	$\{e_1\}\{e_2e_3\}\{e_3,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(3)^3$
	$\{e_1e_3\}\{e_2e_3\}\{e_3,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(3)^3$
	$\{e_1\}\{e_2\}\{E,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(4)^3$
	$\{e_1e_3\}\{e_2\}\{E,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(4)^3$
	$\{e_1\}\{e_2e_3\}\{E,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(4)^3$
	$\{e_1e_3\}\{e_2e_3\}\{E,e_3\}$	M^3	$(2)\,(2)\,(4)^3$
	$\{e_1e_3\}\{e_2\}\{E,E\}$	${}^3M$	
	$\{e_1\}\{e_2e_3\}\{E,E\}$	${}^3M$	
	$\{e_1e_3\}\{e_2e_3\}\{E,E\}$	${}^3M$	
	$(2)\,(2)\,(4)^2\rightarrow 12M^3$		

$m = 4$ $\{\mathbf{e_1}\}\{\mathbf{e_2}\}\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}\}$

$\{e_1\}\{e_2\}\{e_3, e_3e_4\}$	M^4
$\{e_1e_4\}\{e_2\}\{e_3, e_3e_4\}$	M^4
$\{e_1\}\{e_2e_4\}\{e_3, e_3e_4\}$	M^4
$\{e_1e_4\}\{e_2e_4\}\{e_3, e_3e_4\}$	M^4
$\{e_1e_4\}\{e_2\}\{e_3, e_3\}$	${}^4M$
$\{e_1\}\{e_2e_4\}\{e_3, e_3\}$	${}^4M$
$\{e_1e_4\}\{e_2e_4\}\{e_3, e_3\}$	${}^4M$
$\{e_1\}\{e_2\}\{e_3e_4, e_3e_4\}$	${}^4M$
$\{e_1e_4\}\{e_2\}\{e_3e_4, e_3e_4\}$	${}^4M$
$\{e_1\}\{e_2e_4\}\{e_3e_4, e_3e_4\}$	${}^4M$
$\{e_1e_4\}\{e_2e_4\}\{e_3e_4, e_3e_4\}$	${}^4M$
$(2)\,(2)\,(4)^3 \to 8M^4$	

$N_1(pmmm) = 11$ $N_2(pmmm) = 4\mathbf{14} + 7\mathbf{10} = 126$

$N_3(pmmm) = 84\mathbf{12} + 42\mathbf{8} = 1344$ $N_4(pmmm) = 1176\mathbf{8} + 168\mathbf{4} = 10080$

p1 $\{X\}$ $AK : \{X\}$

$N_1(p1) = 1$

$\mathbf{p2_122}\,\{S, T\}$ $AK : \{S\}\{T\}$

$N_1(p2_122) = 3$ $N_2(2_122) = 6$

p2mm $\{X, R, R_1\}$ $AK : \{X\}\{R\}\{R_1\}$

$N_1(p2mm) = 7$ $N_2(p2mm) = 7\mathbf{6} = 42$ $N_3(p2mm) = 42\mathbf{4} = 168$

Из полученых результатов одновременно легко получаются числа N_m : $N_1 = 117$ $N_2 = 552$ $N_3 = 2520$ $n_4 = 10080$, соответствующие результатам в работе [4].

Из всех указанных в частчном каталоге групп простой или кратной антисимметрии типа M^m, в рамках типа антисимметрической характеристики которых существует число 4, выводится группы кратной антисимметрии типа M^{m+1} исключительно при соблюдении условия независимости антитождеств $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ $(1 \leq m \leq q-1)$, т.е. нет возможности появления одинаковых груп типа M^{m+1}, выводимых из какой-нибудь из таких групп типа M^m, причем тип антисимметрических характеристик AK^{m+1} полученных групп типа M^{m+1} одинаков типу антисимметрической характеристики AK^m пораждающей группы типа M^m.

Таким образом минимальный частичный каталог групп простой и кратной антисимметрии лент типа M^m сводится к 18 группам типа M^1, 15 группам типа M^2 и 2 группам типа ${}^2M$, 10 группам типа M^3 и 6 группам типа ${}^3M$, 4 группам типа M^4 и 7 группам типа ${}^4M$. Все группы простой и кратной антисимметрии лент типа M^m получаются непосредственно из указанных, в соответствии с [7].

Способ получения полного каталога из частичного каталога илюстрирует пример группы $pm2m$, с множеством образующих $\{R, R_1, R_2\}$ и с антисимметрической характистикоjи $AK\,\{R\}\{R_1, R_2\}$. Трансформациям $p, m, 2, m$, из которых, в заданном порядке, состоит международный символ группы, $pm2m$ соответствуют в одинаковом порядке, трансформации R_1R_2, R_1, RR_1, R и потому, применением штих соотношений можно непосредственно из соотвецтвующих антисимметрических характеристик получить международные символы групп простой и кратной антисимметрии типа M^m, выводимых из группы $pm2m$.

Когда $m = 1$ получаем:

$\{e_1\}\{E,E\}$	$pm2_1m_1$	(1)
$\{E\}\{e_1,e_1\}$	pm_12_1m	(2)
$\{e_1\}\{e_1,e_1\}$	pm_12m_1	(3)
$\{E\}\{E,e_1\}$	p_1m2m	(4)
$\{e_1\}\{E,e_1\}$	$p_1m2_1m_1$	(5)

Когда $m = 2$, двенадцать групп типа M^m (обозначенных числами (1) – (12)), в соответствии с алгоритмом [7], получаем в форме сопствительного каталога:

	$\{e_1\}\{E,E\}$		$pm2_1m_1$	
1)	$\{e_1\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$pm_{10}2_{11}m_1$	(1)
2)	$\{e_1e_2\}\{e_2,e_2\}$	M^2	$pm_{10}2_1m_{11}$	(2)
3)	$\{e_1\}\{E,e_2\}$	M^2	$p_{10}m2_1m_1$	(3)
4)	$\{e_1e_2\}\{E,e_2\}$	M^2	$p_{10}m2_{11}m_{11}$	(4)
5)	$\{e_1e_2\}\{E,E\}$	${}^2M$		
	$\{E\}\{e_1,e_1\}$		pm_12_1m	
1′)	$\{E\}\{e_1e_2,e_1,e_2\}$	${}^2M$		
2′)	$\{e_2\}\{e_1e_2,e_1,e_2\}$	M^2	$pm_{11}2_1m_{10}$	(5)
3′)	$\{E\}\{e_1,e_1e_2\}$	M^2	$p_{10}m_12_1m$	(6)
4′)	$\{e_2\}\{e_1,e_1e_2\}$	M^2	$pm_{10}2_{11}m_{10}$	(7)
5′)	$\{e_2\}\{e_1,e_1\}$	M^2	$pm_12_{11}m_{10}$	(8)
	$\{e_1\}\{e_1,e_1\}$		pm_12m_1	
1″)	$\{e_1\}\{e_1e_2,e_1e_2\}$	M^2	$pm_{11}2_{10}m_1$	(9)
2″)	$\{e_1e_2\}\{e_1e_2,e_1e_2\}$	${}^2M$		
3″)	$\{e_1\}\{e_1,e_1e_2\}$	M^2	$p_{10}m_12_1m_{11}$	(10)
4″)	$\{e_1e_2\}\{e_1,e_1e_2\}$	M^2	$p_{10}m_12_{10}m_{11}$	(11)
6″)	$\{e_1e_2\}\{e_1,e_1\}$	M^2	$pm_12_{10}m_{11}$	(12)

Остальных двенадцать групп типа M^2 (обозначеных числами (13)–(24)) получаются из групп p_1m2m и p_1m2_1m исключительно при соблюдении условия независимости антитождеств e_1, e_2 [6, Теорема I,б)].

(13) $p_1m2_{10}m_{10}$	(19) $p_1m2_{11}m_{11}$
(14) $p_{11}m_{10}2_{10}m$	(20) $p_{11}m_{10}2_{11}m_{10}$
(15) $p_{11}m_{10}2m_{10}$	(21) $p_{11}m2_1m_1$
(16) $p_{11}m2_{10}m_{10}$	(22) $p_{11}m_{10}21m_{11}$
(17) $p_1m_{10}2_{10}m$	(23) $p_1m_{10}2_{11}m_1$
(18) $p_1m_{10}2m_{10}$	(24) $p_1m_{10}2_1m_{11}$

Аналогичным способом получается и полный каталог групп типа M^3, выводимых из группы $pm2m$, который состоит из восьмидесяти четыр«х групп типа M^3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.В. Шубников, *Черное-белые бесконечных лент*, Кристаллография, **7**, 2 1962, 186–191.

[2] Н.В. Белов, Т.С. Кунцевич, Н.Н. Неронова, *Шубниковские групы (антисимметрии) для бесконечных двухсторонных лент*, Кристллография, **7**, 5, 1962, 805–808.

[3] А.М. Заморзаев, рит О группах симметрии и различного рода антисимметрии, Кристаллография, **8**, 3, 1963, 131–132.

[4] А.Ф. Палистрант, А.М. Заморзаев, *Группы симметрии и различного рода антисимметрии бордюров и лент*, Кристаллография, **9**, 2, 1964, 155–161.

[5] А.М. Заморзаев, *Теория простой и кратной антисимметрии бордюров*, Штинца, Кишинев, 1976.

[6] С. Яблан, *Группы простой и кратной антисимметрии бордюров*,Publ. Inst. Math. (Beograd) **36** (**50**) 1986, 35–40.

[7] С. Яблан, *Обобщенные пространственные шубниковские группы*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **40** (**54**) 1986, 33–48.

Математички институт
Кнез михаjлова 35
11000 Београд
Југославија

(Поступила 19 05 1986)