PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 40 (54), 1986, 187–189

О НЕЛИНЕЙНОЙ СЛОЖНОСТИ МОНОТОННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА БУЛЕВЫХ СУММ

Р. Л. Шчепанович

Резюме. Построено конкретное семейство n булевых сумм от n переменных, реализация которых посредством шем в монотонном базисе требует по порядку не менее $n^{3/2-\varepsilon}$ элементов, для любого $\varepsilon > 0$. Построенный пример относиця к пока еще маленькому числу (<10) нелинейных нижних оценок монотонной сложености. Указанное семейство булевых сумм описываеця очень просто (в отличие от ранее известных примеров нелинейной сложности монотонной реализации) и естественно возникает при реализации распознавании некоторых изображений.

Семейством булевых сумм называеця совокупность $f = (f_1, \dots, f_m)$ из m булевых функций от n переменных $x_1, \dots, x_n$ вида $f_i = \vee_{j \in F_i} x_j$, где $F_i \subseteq \{1, \dots, n\}$. Будем рассматривать реализацию одного семейства булевых сумм в классе шем из функциональных элементов в монотонном базисе $\{\&, \vee\}$ (определение см., нацпремер, в [1]). *Моногонныю сложность* $L_0(f)$, семейства булевых сумм f, определим как минимальное число элементов, достаточное для реализации семейства f шемой в этом базисе.

Семейство булевых сумм f будем называть (h,k)-*разделимым*, если для любого множества $h+1$ попарно различных индексов $i_0, i_1, \dots, i_h$ выполняеця соотношение $|f_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \ldots \cap f_{i_h}| \leq k$ (символ $|S|$ обозначает мощность множества S). Известна следующая оценка:

Лемма 1. [3] *Если семейство булевых сумм* $f = (f_i, \dots, f_m)$ *являеця* (h,k)-*разделимым, то*

$$L_0(f) \geq \sum_{i=1}^{m} (|F_i|/k - 1)/(h \cdot \max(1, h-1)).$$

Этот результат используем при доказательстве нелинейной сложности монотонной реализации одного семейства n булевых сумм от переменных $x_1, \dots, x_n$ к описанию которого теперь переходим.

AMS Subject Classification (1980): Primary 68 C 25, 68 G 10, 94 C 10.

Пусть $\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ какой-то набор длины n из нулей и единиц. Обозначим через $f^\alpha = (f_1, \ldots, f_n)$ семейство булевых сумм определенно следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_1\alpha_1 \\
f_2 &= x_1\alpha_2 \vee x_2\alpha_1 \\
f_3 &= x_1\alpha_3 \vee x_2\alpha_2 \vee x_3\alpha_1 \\
&\vdots \\
f_n &= x_1a_n \vee x_2a_{n-1} \vee x_3a_{n-2} \vee \cdots \vee x_n\alpha_1.
\end{aligned}$$

Будем рассматривать семейство f^{α_0}, где α_0 следующий набор длины n:

$$\alpha_0 = (1\underbrace{0}_{1}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}10\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{t}1\underbrace{0\ldots0}_{l\le t+1}).$$

Лемма 2. *Число нулей t в предпоследней группе набора α_0 удовлетворяет неравенству $t \geq C_2 \cdot \sqrt{n}$.*

(Всюду в дальнейшем буквой C, с индексами, штрихами и т.д., обозначаюця некоторые константы).

Доказательство. Очевидно,

$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + t + (t+1) + l, \ \text{ где } \ l \leq t+1.$$

Следует $n = (t+1)(t+2)/2 + l$, т.е. $t = \max_{(x+1)(x+2)\leq 2n} x$, x-натуральное число, откуда и получаем $t = [(\sqrt{8n+1} - 3)/2] \geq C_2 \cdot \sqrt{n}$. (Символ $[a]$ обозначает наилбольшее целое число, меньшее чем a).

Лемма 3. *Семейство f^{α_0} являеця $(1, r)$-разделимым, где $r \leq C_3 \cdot n^\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Нужно показать, что для любых i, j, таких что $1 \leq i < j \leq n$, справедливо $m_{ij} = |F_i \cap F_j| \leq C_3 \cdot n^\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$.

Достаточно доказать, что $m_{ij} \leq C_3 \cdot n^\varepsilon$ для i и j таких, что $1 \in F_i \cap F_j$. На самом деле, пусть i' и j' такие индексы, что $1 \notin F_{i'} \cap F_{j'}$. Обозначим через $v = \min_{p \in F_{i'} \cap F_{j'}} p$. Очевидно (см. рис. 1), что $m_{i'j'} = m_{i_0j_0}$, где $i_0 = i' - (v-1)$, $j_0 = j' - (v-1)$ и выполнено $1 \in F_{i_0} \cap F_{j_0}$.

$$\begin{array}{ll}
i_0 = i' - (v-1): & 1 \cdots 1 \\
i' : & \underbrace{\quad}_{v-1} 1 \cdots 1 \\
j_0 = j' - (v-1): & 1 \cdots 1 \\
j' : & \underbrace{\quad}_{v-1} 1 \cdots 1
\end{array}$$

Рис. 1

Пусть теперь, $1 \le i < j \le n$ и $1 \in F_i \cap F_j$. Введем обозначения (см. рис 2): $m = \min_{1<p\in F_i}(p-2)$, $k = \min_{1<p\in F_j}(p-2) - m$. Ясно, что $k > 0$.

$$1\overbrace{\qquad}^{m}1\overbrace{\qquad}^{m-1}1\ldots\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{m-(s-1)}1$$

$$1\overbrace{\qquad}^{m+k}1\overbrace{\qquad}^{m+k-1}1\ldots\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{m+k-(s-1-a)}1$$

Рис 2.

Для каждого $p \in F_i \cap F_j$, $p > 1$, существуют натуральные числа s и a, $s \le m$, $s > a > 0$, которые удовлетворяют следующему уравнению (см. рис. 2):

$$m + (m-1) + \cdots + (m-s+1) + s = (m+k) + (m+k-1) + \cdots + \\ + (m+k-s+a+1) + (s-a).$$

Оттуда получаем:

$$2s = a + (2m+k+3)\cdot a/(a+k). \tag{1}$$

Таким образом, m_{ij} равняеця числу решения уравнения (1) по s и a в натуральных числах (m и k-натуральные числа, зависящие только от i и j!).

Нетрудно заметить, что натуральных чисел a удовлетворяющих уравнению (1) не больше произведения числа делителей от $(2m+k+3)$ на число делителей от k. Имея в виду [2], что число делителей $d(n)$ натурального числа n для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяет неравенству $d(n) < C_1 \cdot n^{\varepsilon}$, Лемма доказана.

Теорема. *Для любого* $\varepsilon > 0$, $L_0(F^{\alpha_0}) \ge Cn^{3/2-\varepsilon}$.

Доказательство. Из лемм 1, 2 и 3 следует:

$$\begin{aligned} L(f^{\alpha_0}) &\le \sum_{i=1}^{n}(|F_i|/r - 1) = (1/r)\sum_{i=1}^{n}|F_i| - n \\ &= (1/r)(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + \cdots + (t+1)\cdot t + (l+1)\cdot(t+1)) - n \\ &\ge \{1/(C_3 n^{\varepsilon})\}(1^2 + 2^2 + \cdots + t^2) - n \ge C' n^{3/2-\varepsilon} - n \ge Cn^{3/2-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Б. Лупанов, *О синтезе некоторых классов управляющих систем*, сб. “Проблемы кибернетики”, вып. 10, Москва, 1963, 63–97.

[2] К. Чандрасехаран, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Мир, Москва, 1974.

[3] K. Mehlhorn, *Some remarks on Boolean sums*, Acta Informatica **12** (1979), 371–375.

Институт за математику и физику
Универзитет “Вељко Влаховић”
81000 Титоград
Југославија

(Поступила 22 11 1984)