Sur une fonction continue dans un intervalle qui prend chaque valeur de cet intervalle $\aleph_0$ fois

Par

WACLAW SIERPINSKI

En rapport avec ma Note sur les fonctions continues qui prennent chacune de leurs valeurs au plus $\aleph_0$ fois que j'ai publié dans le *Bulletin de l'Académie Royale Serbe*[1]) M. le professeur S. Ruziewicz a posé le problème *s'il existe une fonction continue dans l'intervalle* (0, 1) *qui prend chaque valeur de cet intervalle précisément* $\aleph_0$ *fois.* Le but de cette Note est donner un exemple d'une telle fonction.

J'obtiens cet exemple par une modification de la fonction continue de G. Cantor qui n'est pas constante et qui admet un ensemble dense d'intervalles d'invariabilité[2]). Je remplace notamment dans l'image géométrique (dans la „courbe") de cette fonction tout segment d'invariabilité par une somme de trois segments convenablement choisis.

On démontre notamment sans peine qu'il existe une et une seule fonction $f(x)$ définie et continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, telle que:

$$1) \qquad f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\ , \quad f\left(\frac{4}{9}\right)=0\ , \ f\left(\frac{5}{9}\right)=1$$

et la fonction $f(x)$ est linéaire dans chacun des intervalles $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right), \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right)$.

1) Bull. de l'Acad. des Sc. Math. et Nat., A., Belgrade 1936, p. 75--78.

2) Acta Mathematica IV, p. 386.

2) $$f(x)=\frac{1}{2}f(3x) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}\,.$$

3) $$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f(3x-2) \quad \text{pour} \quad \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\,.$$

Or, on voit sans peine que l'image géométrique J de la fonction $f(x)$, c. à d. l'ensemble J de tous les points $(x,\ y)$ du plan, tels que $0\leqslant x\leqslant 1$ et $y=f(x)$, est une somme de deux ensembles,

$$J=P+Q\ ,$$

où P est une somme d'une infinité dénombrable de segments et l'ensemble Q (dont les points sont des points d'accumulation de l'ensemble P) a la propriété que toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre Q au plus en un point. D'autre part, on démontre facilement que toute droite $y=a$, où $0\leqslant a\leqslant 1$, rencontre l'ensemble P en une infinité (évidemment dénombrable) de points. Il en résulte aisément que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés désirées.