Über einen Satz von Herrn Ahlfors

Von

M. RADOJČIĆ

1. Herr L. Ahlfors hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei F eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die im endlichen keine anderen Singularitäten als algebraische Verzweigungspunkte besitzt. $n(\varrho)$ sei die Anzahl der mit der Multiplizität ihrer Verzweigungsgrade gezählten Windungspunkte von F, die von einem gewissen Punkte der Fläche aus durch einen auf der Fläche gelegenen Weg von der Höchstlänge ϱ erreicht werden können. Wenn dann das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho\, n(\varrho)} \tag{1}$$

divergiert, so ist die Fläche vom parabolischen Typus[1]).

Nun kann gefragt werden, ob und wann der Ausdruck (1) durch andere, öfter divergierende Ausdrücke, worunter etwa

$$\int^{\infty} \frac{\varrho^s\, d\varrho}{n(\varrho)} \qquad s=0,\ 1,\ 2,\cdots, \tag{2}$$

vorkommen möge, ersetzt werden darf.

---

[1]) Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Comment. Math. Helv. Vol. 3, 1931)

Als Beispiel sei die Riemannsche Fläche des elliptischen Normalintegrals erster Gattung, mit $k=1/3$, erwähnt. Man findet leicht, dass dann (mit $[\alpha]$ das grösste Ganze von α bezeichnend)

$$n(\varrho)=2\left[\frac{\varrho+1}{2}\right]^2$$

ist, also ist nicht nur das Integral (1), sondern auch (2) für $s=0$ konvergent und erst für $s=1$ divergent.

Herr Z. Kobayashi hat durch sein Verfahren jüngst in dieser Richtung gewisse allgemeineren Resultate gewonnen.[2]) Wier möchten hier in derselben Richtung, jedoch im Rahmen des obigen Satzes, bloss einige an der Hand liegende Tatsachen erwähnen.

2. *Unter der Voraussetzung, dass sich alle Windungspunkte der Fläche über einem beschränkten Gebiet der Zahlenebene befinden, welches in einen Kreis mit dem Durchmesser δ fallen mag, kann im obigen Ahlforschen Satz statt des Integrals* (1) *das Integral*

$$\int^{\infty}\frac{d\varrho}{n(\varrho)-n(\varrho-\delta)} \tag{3}$$

gesetzt werden.

Die Punkte dieser Ebene seien mit w bezeichnet. Die Verzweigungspunkte seien w_ν $(\nu=1,2,\cdots)$, $z=z(w)$ sei eine Funktion, die F auf einen Kreis $|z|<R\leqq\infty$ konform abbildet, G_ϱ jener Teilbereich von F, dessen Punkte vom Punkt w_0 von F, der dem Punkt $z=0$ entspricht, eine auf F gemessene Entfernung besitzen, die kleiner als ϱ ist. Der Rand Γ_ϱ von G_ϱ besteht aus lauter Kreisen, die sich innerlich berühren und in w_0 und den Verzweigungspunkten ihre Mittelpunkte haben. Dabei sei ϱ_ν die Entfernung des Verzweigungspunktes w_ν und k_ν der entsprechende Verzweigungsgrad. Nach Voraussetzung besteht ein Kreis $|w-p|<\delta/2<\infty$ (Kreis K), der alle Verzweigungspunkte und, was stets noch vorausgesetzt werden kann, den Punkt w_0 enthält. Die Länge von Γ_ϱ nach Ahlfors ist gleich

---

[2]) A Remark on the Type of Riemann Surface (Sci. Rep. Tokyo Bun. Dai. A, Nr. 62, 1937).

$$L(\varrho) = 2\pi\left[(k_0+1)\varrho + \sum_{0<\varrho_\nu<\varrho} k_\nu(\varrho-\varrho_\nu)\right].$$

Wird aber $\varrho \geqslant \delta$ oder $\varrho - \varrho_\nu \geqslant \delta$, so enthält der Kreis $|w-w_0| = \varrho$ bzw. der Kreis $|w-w_\nu| = \varrho - \varrho_\nu$ den Kreis K ganz im inneren, also begrenzt er von aussen ein schlichtes Gebiet von F. Dieses Gebiet sei nun dem Bereich G_ϱ hinzugefügt und dadurch Γ_ϱ verkürzt. Verfährt man so in bezug auf alle Kreise von Γ_ϱ, nennt den erweiterten Bereich $G_{\delta,\varrho}$ und seinen Rand $\Gamma_{\delta,\varrho}$, so wird, vorausgesetzt dass $\varrho \geqslant \delta$ ist, die Länge von $\Gamma_{\delta,\varrho}$ gleich

$$L_\delta(\varrho) = 2\pi \sum k_\nu(\varrho-\varrho_\nu),$$

wobei die Summe über diejenigen ν zu erstrecken ist, für die $0 < \varrho - \varrho_\nu < \delta$, d. h. $\varrho - \delta < \varrho_\nu < \varrho$ gilt. Folglich ist

$$(4) \qquad L_\delta(\varrho) = 2\pi \int_{\varrho-\delta}^{\varrho} (\varrho - t)\, dn(t) = 2\pi\left[\int_{\varrho-\delta}^{\varrho} n(t)\, dt - \delta n(\varrho-\delta)\right]$$

oder auch

$$L_\delta(\varrho) = L(\varrho) - L(\varrho-\delta) - 2\pi\delta[n(\varrho-\delta)+1].$$

Die Funktion $z(w)$ bildet den Bereich $G_{\delta,\varrho}$ auf einen Teilbereich des Kreises $|z| < R$ ab, und dieser Teilbereich nimmt mit wachsendem ϱ zu und stellt für $\varrho \geqslant \delta$ einen Bereich dar, der schon einen ganzen Kreis $|z| < a$ enthält. Also ist die Länge des Randes des letztgenannten Bereichs

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)| \cdot |dw| > 2a\pi.$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$4a^2\pi^2 < L_\delta(\varrho) \int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)|^2 \cdot |dw|$$

und hieraus

$$4a^2\pi^2 \int_\delta^\infty \frac{d\varrho}{L_\delta(\varrho)} = \int_\delta^\infty \int_{\Gamma_{\delta,\varrho}} |z'(w)|^2\, d\varrho\, |dw|.$$

Das rechtsstehende Doppelintegral stellt den Flächeninhalt des in der z-Ebene gelegenen Bildbereich von $G_{\delta,\varrho}$ dar, welcher jedenfalls kleiner als πR^2 ist, so dass

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\varrho}{L_\delta(\varrho)} < \frac{R^2}{4a^2\pi^2} \tag{5}$$

gilt.

Da $n(\varrho)$ eine monoton nichtabnehmende Funktion ist, folgt aus (4)

$$L_\delta(\varrho) < 2\delta\pi\,[\,n(\varrho) - n(\varrho-\delta)\,] \tag{6}$$

und aus (5) und (6)

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho) - n(\varrho-\delta)} < \frac{\delta R^2}{2\pi a^2}\,.$$

Divergiert das linksstehende Integral, so ist $R=\infty$, also liegt der parabolische Fall vor und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn ausserhalb des Kreises K endlich viele und zwar algebraische Windungspunkte vorkommen.

3. Wird die Riemannsche Fläche F über einer Zahlenkugel, deren Durchmesser 1 sei, statt über einer Zahlenebene ausgebreitet gedacht und die Ahlforsche Betrachtungsweise angewendet, so ergibt sich der folgende Satz:

Es sei F eine einfach zusammenhängende, über der Zahlenkugel verzweigte Riemannsche Fläche, die keine anderen Singularitäten als algebraische Windungspunkte besitzt. $n(\varrho)$ sei die Anzahl der mit der Multiplizität ihrer Verzweigungsgrade gezählten Windungspunkte von F, die von einem gewissen Punkt von F aus durch einen auf F gelegenen Weg von der Höchstlänge ϱ erreicht werden können. Wenn das Integral

$$\int^{\infty} \frac{d\varrho}{n(\varrho) - n(\varrho-\pi)} \tag{7}$$

divergiert, so ist die Fläche vom parabolischen Typus.

In der Tat, alle vorigen Begriffe lassen sich in gleicher Weise auf der Zahlenkugel erklären, also kann auch dieselbe Bezeichnung angewendet werden. Man betrachte am Rand Γ_ϱ des gegenwärtigen Bereichs G_ϱ einen seiner Kreise, dessen Halbmesser gleich $\varrho - \varrho_\nu$ und dessen Peripherie gleich $2\pi \sin(\varrho - \varrho_\nu)$ ist. Also besteht der Kreis nur für $0 < \varrho - \varrho_\nu < \pi$. Infolgedessen wird, vorausgesetzt dass $\varrho > \pi$ ist,

$$L(\varrho) = 2\pi \sum k_\nu \sin(\varrho - \varrho_\nu) \ , \qquad 0 < \varrho - \varrho_\nu < \pi \ ,$$

d. h.

$$(8) \qquad L(\varrho) = 2\pi \int_{\varrho-\pi}^{\varrho} \sin(\varrho - t)\, d\,n(t) = 2\pi \int_{\varrho-\pi}^{\varrho} n(t) \cos(\varrho - t)\, dt \, .$$

Im planimetrischen Zusammenhang mit der w-Ebene sei die Zahlenkugel durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta - 2) = 0$$

gegeben, wobei $\zeta = 0$ die Gleichung der w-Ebene selbst ist. Dann besteht zwischen den Bogenelementen in der w-Ebene und auf der Kugel $(d\sigma)$ die Beziehung

$$|dw| = \frac{2\, d\sigma}{|2 - \zeta|} \ ,$$

also wird durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$4 a^2 \pi^2 < L(\varrho) \int_{\Gamma_\varrho} \left| \frac{2\, z'(w)}{2 - \zeta} \right|^2 d\sigma \qquad \left(L(\varrho) = \int_{\Gamma_\varrho} d\sigma \right)$$

folglich

$$(9) \qquad 4 a^2 \pi^2 \int_{\pi}^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} < \int_{\pi}^{\infty} \int_{\Gamma_\varrho} \left| \frac{2\, z'(w)}{2 - \zeta} \right|^2 d\varrho\, d\sigma < \pi R^2 \ ,$$

da das Doppelintegral den Flächeninhalt des Bildbereichs von G_ϱ in der z-Ebene darstellt.

Anderseits folgt aus (8) und der Bemerkung, dass

$$\int_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}} |\cos(\varrho - t)|\, dt - \int_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho} |\cos(\varrho - t)|\, dt = 0$$

ist.

$$L(\varrho) = \int_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}} \left[n\left(\varrho - \frac{\pi}{2}\right) - n(t) \right] \cdot |\cos(\varrho - t)|\, dt +$$

$$+ \int_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho} \left[n(t) - n\left(\varrho - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot |\cos(\varrho - t)|\, dt \ ,$$

also

$$L(\varrho) \leqslant \left[n\left(\varrho - \frac{\pi}{2}\right) - n(\varrho - \pi) \right] \int_{\varrho-\pi}^{\varrho-\frac{\pi}{2}} |\cos(\varrho - t)|\, dt +$$

$$+ \left[n(\varrho) - n\left(\varrho - \frac{\pi}{2}\right) \right] \int_{\varrho-\frac{\pi}{2}}^{\varrho} |\cos(\varrho - t)|\, dt$$

und, da die beiden letzten Integrale kleiner als $\pi/2$ sind, ist

$$L(\varrho) < \frac{\pi}{2} [n(\varrho) - n(\varrho - \pi)] \, . \tag{10}$$

Nun folgt unmittelbar aus (9) und (10) der zu beweisende Satz.

4. Die Divergenz der Integrale (3) und (7) kann indessen stets aus der Divergenz des Integrals (2), worin $s=1$ gesetzt wird, abgeleitet werden, so dass *an Stelle der Integrale* (3) *und* (7) *auch das Integral* (2) *mit* $s=1$ *stehen darf.*

Wird nämlich $\varrho = \alpha x$, $n(\alpha x) = \varphi(x)$, $\varphi(x) - \varphi(x-1) = 1/f(x)$ gesetzt, wobei α die Zahlen δ bzw. π bedeutet, so bekommen die Integrale (3) und (7) die Form

$$\alpha \int_{x_0}^{\infty} f(x)\, dx \ . \tag{11}$$

Nach einem Satz von Herrn K. Knopp folgt aus der Konvergenz des Integrals (11), worin nur $f(x)$ eine nichtnegative

Funktion bedeuten soll, was hier der Fall ist, dass auch das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}} = \int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\int_{x-1}^{x} \varphi(y)\,dy - \int_{x_0-1}^{x_0} \varphi(y)\,dy}$$

konvergiert.[3]) Da das rechtsstehende Integral nicht kleiner als

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\varphi(x)} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\varrho\,d\varrho}{n(\varrho)}$$

ist, so ist auch das letzte Integral konvergent. Also, umgekehrt, aus der Divergenz von (2) mit $s=1$ folgt die Divergenz von (3) und (7).

---

[7]) Ueber Reihen mit positiven Gliedern (J. London Math. Soc. Vol. 3, Part 3), s. Satz V.