Equations différentielles algébriques d'ordre fini à intégrales réelles bornées

Par

MICHEL PETROVITCH

1. Je ferai d'abord remarquer que les résultats exposés dans ce qui suit sont valables pour toute valeur réelle de la variable indépendante x et pour toute intégrale réelle y des équations différentielles ici considerées, qu'elles soient continues ou bien qu'elles présentent n'importe quel genre de discontinuité que peut présenter l'intégrale d'une équation différentielle algébrique d'ordre fini. Ce qui y joue un rôle, c'est la *grandeur* de l'intégrale et non pas son *mode de variation.* Ainsi qu'on le verra, les résultats sont fondés sur une inégalité algébrique élémentaire entre les grandeurs telles qu'elles sont effectivement, sans qu'il y ait besoin de tenir compte de leurs rapports mutuels ou avec la variable indépendante avec lequelle elles varient.

Toute équation différentielle algébrique en

$$y\,, y', y'', \cdots y^{(p)} \tag{1}$$

s'écrit sous la forme

$$F(x\,, y\,, y', \cdots y^{(p)}) = 0 \tag{2}$$

où F est polynome en variables (1), à coefficients fonctions quelconques de la variable x.

Considérons les équations (2) où le polynome F est *pair* en chacune des variables (1), *sauf l'une parmi elles,* par exemple $y^{(m)}$. Dans ce cas, en mettant $y^{(m)}$ en évidence dans l'ensemble des termes de (1) contenant cette variable à des puissances impaires, $y^{(m)}$ s'exprime, en vertu de l'équation (2), sous la forme

$$y^{(m)} = \frac{P(x, y, y', \cdots y^{(m)}, \cdots y^{(p)})}{Q(x, y, y', \cdots y^{(m)}, \cdots y^{(p)})} \tag{3}$$

où P et Q sont polynomes en variables (1), *pairs* en chacune de ces variables, sans y exepter $y^{(m)}$.

Le polynome P est la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$f_{p_0, p_1, \ldots p_h} \cdot (y)^{2p_0} (y')^{2p_1} \cdots (y^{(p)})^{2p_h} \tag{4}$$

et le polynome Q se compose de la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$\varphi_{p_0', p_1', \ldots p_h} \cdot (y)^{2p_0'} (y')^{2p_1'} \cdots (y^{(p)})^{2p_h'} \tag{5}$$

où les f et les φ sont fonctions de x variant avec les indices p_i et p_i'.

Envisageons parmi les équations (2), resp. (3) celles dans lesquelles les termes (4) et (5) des polynomes P et Q remplissent les conditions suivantes:

1° *à chaque terme* (4) *figurant effectivement dans* P *correspond un terme* (5) *ayant les mêmes indices* p_i *et figurant effectivement dans* Q;

2° *les fonctions* φ *ont toutes un même signe pour toute valeur réelle de* x;

3° *les rapports de deux fonctions* f *et* φ *ayant les mêmes indices sont tous finis quelle que soit la valeur réelle, finie ou infinie de* x.

Lorsque à un terme (5) de Q ne correspond pas un terme (4) aux mêmes indices, figurant effectivement dans P, la valeur du rapport de deux fonctions correspondantes f et φ est à considérer comme égal à zéro.

Pour les équations différentielles (2) remplissant ces conditions nous démontrerons la proposition suivante:

I. *Toute intégrale réelle de l'équation* (2) *s'exprime, et cela pour toute valeur réelle de* x, *sous la forme*

$$y = P_{m-1}(x) + \Psi_1 + \theta\,\Psi_2 \tag{6}$$

$$\Psi_1 = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \Phi_1\, dx^m \tag{7}$$

$$\Psi_2 = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \Phi_2\, dx^m \tag{8}$$

et où

1⁰ y_0 *désigne la valeur finie que prend* y *pour une valeur fixe* $x = x_0$;

2⁰ Φ_1 *est l'un des raports*

$$\frac{f_{p_0, p_1, \ldots p_h}}{\varphi_{p_0, p_1 \ldots p_h}} \tag{9}$$

et Φ_2 *est la différence de deux de ces rapports;*

3⁰ $P_{m-1}(x)$ est le polynome degré $m-1$

$$P_{m-1} = y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \cdots + \frac{y_0^{(m-1)}}{(m-1)!}x^{m-1}$$

(x_0, y_0) désignant un point par lequel passe la courbre intégrale;

4⁰ θ *est un nombre compris entre* 0 *et* 1.

Pour le faire voir, remarquons que l'on peut toujours supposer le signe commun aux fonctions φ positif; s'il était négatif il n'y aurait qu'à changer les signes à toutes les fonctions f.

Utilisons alors la proposition élémentaire d'après laquelle, les β_k et λ_k étant positifs et les signes des α_k étant quelconques la valeur du rapport

$$\frac{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n}{\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \cdots + \beta_n\lambda_n}$$

est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur des rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots \frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Si l'on prend

pour les α_k les $f_{p_0, p_1, \ldots p_k}$

pour les β_k les $\varphi_{p_0, p_1, \ldots p_k}$

pour les λ_k les

$$(y)^{2p_0}(y')^{2p_1}\ldots(y^{(p)})^{2p_k}$$

on trouve que le second membre de l'équation (3) est compris entre la plus petite et la plus grande valeur des rapports (9), lorsque les indices $p_0, p_1, \ldots p_h$ parcourrent l'ensemble d'entiers positifs figurant effectivement comme indices dans les termes (4) et (5) du numérateur et du dénominateur du second membre de l'équation (3).

Si l'on désigne par Δ_1 et Δ_2 le plus petit et le plus grand rapport (7) pour les valeurs de x comprises dans un intervalle (a, b), on aura

$$y^{(m)} = \Delta_1 + \theta(\Delta_2 - \Delta_1) \tag{10}$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

Comme dans l'intervalle la différence $\Delta_2 - \Delta_1$ ne change pas de signe, si l'on désigne par y_0 la valeur finie que prend y pour une valeur fixe $x = x_0$ comprise dans (a, b) et si l'on prend

$$\Phi_1 = \Delta_1, \qquad \Phi_2 = \Delta_2 - \Delta_1 \tag{11}$$

l'intégrale y, pour les x compris dans l'intervalle (a, b) s'exprime bien sous la forme (6), ce qui démontre la proposition.

Lorsque x parcourt les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, les rapports Δ_1 et Δ_2 peuvent changer d'un intervalle (a, b) à un autre. Les limites extremes 0 et 1 de θ seront effectivement atteintes pour les valeurs de x correspondant à ces passages.

Dans le cas plus particulier où l'equation différentielle (2) ne contient pas x explicitement, les fonctions f et φ se réduisent à des constantes, ainsi que Δ_1 et Δ_2. Dans ce cas

II. *Toute intégrale réelle y de* (2) *s'exprime, et cela pour toute valeur réelle de x, sous la forme*

$$y = P(x - x_0) \tag{12}$$

où P est un polynome de degré m en $x - x_0$ linéaire en nombre θ à coefficients dépendant des x_0, y_0 et de dérivées $y_0, y_0' \ldots y_0^{(m-1)}$.

2. A la place de l'équation (3) considérons maintenant l'équation plus générale d'ordre p

$$U(x, y, y' \ldots) = \frac{P(x, y, y' \ldots)}{Q(x, y, y' \ldots)} \tag{13}$$

où P et Q sont polynomes en y, $y' \ldots$ et U fonction algébrique de y, $y' \ldots$ à coefficients fonctions quelconques de x, les polynomes P et Q remplissant les conditions supposées remplies par les polynomes P et Q dans l'équation (3).

Le second membre de (13) sera compris entre le plus petit Δ_1 et le plus grand Δ_2 parmi les rapports (9) dans l'intervalle considéré (a, b) de x, ce qui montre que

III. *Toute intégrale réelle y de (13) satisfait, et cela pour tout x compris dans (a, b), à l'équation differentielle*

$$U(x, y, y', \ldots) = \Delta_1 + \theta\,(\Delta_2 - \Delta_1) \tag{14}$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

Pour en faire une application, envisageons le cas où

$$U = \frac{y'}{y}; \tag{15}$$

comme la différence $\Delta_2 - \Delta_1$ est positive, dans tout intervalle (a, b) la courbe intégrale réelle y est située dans la région du plan xOy compris entre les deux courbes

$$y = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} \Delta_1(x)\,dx} \quad \text{et} \quad y = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} \Delta_2(x)\,dx}$$

où (x_0, y_0) est un point par lequel passe la corbe intégrale considérée.

Considérons encore le cas où

$$U = \frac{y''}{y}; \tag{16}$$

toute intégrale réelle y, et pour tout x compris dans (a, b) satisfait à l'équation linéaire

$$y'' - \Delta(x)\, y = 0 \tag{17}$$

où $\Delta(x)$ est une fonction dont la valeur est comprise entre celles de $\Delta_1(x)$ et $\Delta_2(x)$.

Ceci est valable soit que l'intégrale y est continue, soit qu'elle présente n'importe quel genre de discontinuité quelle peut présenter. Si l'on ne considère que les intégrales *continues* dans l'intervalle (a, b) de x, dans lequel Δ_1 ne change pas de signe, on peut y appliquer les resultats connus sur les intégrales réelles continues de l'équation linéaire du second ordre, lesquels conduisent à ces conclusions:

A) Lorsque Δ_1 et Δ_2 sont positifs dans l'intervalle (a, b), ces deux fonctions étant finies dans (a, b), si l'on désigne par N la plus petite valeur de $\Delta_1(x)$, et par M la plus grande valeur de $\Delta_2(x)$ dans cet intervalle, toute courbe intégrale réelle y, dont la dérivée y' s'annnle pour une valeur $x = x_0$ comprise dans (a, b), se trouve dans cet intervalle située entre les courbes

$$y_0 = y \,.\, ch\left[(x - x_0)\sqrt{N}\right]$$

et

$$y_0 = y \,.\, ch\left[(x - x_0)\sqrt{M}\right]$$

où ch désigne le cosinus hyperbolique, et y_0 la valeur que prend iy pour $x = x_0$.

B) Lorsque Δ_1 et Δ_2 sont négatifs dans (a, b), l'intégrale y s'annule dans cet intervalle au moins autant de fois qu'une ntégrale quelconque de l'équation.

$$u'' - \Delta_1(x)\, u = 0$$

et au plus $m+2$ fois, où m désigne le nombre des zèros d'une intégrale quelconque de l'équation

$$v'' - \Delta_2(x)\, v = 0$$

dans le même intervalle. Si alors on désigne par N et M la plus petite valeur de $-\Delta_1(x)$ et la plus grande valeur de $-\Delta_2(x)$, l'intégrale y aura dans l'intervalle (a, b) au moins autant de zéros qu'il y a d'unités entières dans le nombre

$$(18) \qquad \frac{b-a}{\pi}\sqrt{N}-1$$

et au plus autant de zéros qu'il y a d'unités entières dans le nombre

$$(19) \qquad \frac{b-a}{\pi}\sqrt{M}+2$$

La distance mutuelle de deux zèros consécutifs se trouve comprise entre

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sqrt{N}}.$$

L'intégrale est oscillante, composée de demi-ondes alternativement positives et négatives, dont le nombre dans l'intervalle (a, b) s'exprime à l'aide des nombres (18) et (19).

Ce qu'on connaît sur les intégrales réelles de l'équation linéaire binome du second ordre, permet d'affirmer que, l'intervalle (a, b) étant celui de $-\infty$ à $+\infty$, aucune intégrale reélle y ne peut pas être une fonction entière du genre zéro. Si une intégrale n'a pas une infinité de zèros imaginaires et si elle est fonction entière, son produit canonique des facteurs primaires est nécéssairement du genre un. L'existance effective de telles intégrales est mise en évidence par l'intégrale $y = \sin x$ de la plus simple équation de l'espèce (16), l'équation linéaire homogène du second ordre.

3. Pour faire une application aux équations du premier ordre

$$(20) \qquad F(x, y, y') = 0$$

où F est polynome en y et y' à coefficients fonctions de x, envisageons le cas où F est *pair* en y' et impair en y.

En mettant en évidence dans l'ensemble de termes de l'équation la variable y à des puissances impaires, cette variable s'exprime, en vertu de cette équation même, sous la forme

$$(21) \qquad y = \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')}$$

où P est la somme d'un nombre fini de termes de la forme

Envisageons encore, comme une autre application, l'équation du premier ordre et du premier degré

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

où P est un polynome *impair* en y, et Q polynome *pair* en y.

L'équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \frac{s_0 + s_2 y^2 + s_4 y^4 + \cdots}{q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \cdots}$$

où les s_i et les p_i sont fonctions de x.

Lorsque, pour x réel, les fonctions q_i sont de même signe et les valeurs des rapports

$$\frac{s_0}{q_0}, \frac{s_2}{q_2}, \frac{s_4}{q_4}, \cdots$$

restent constamment comprises entre celles de deux fonctions fixes $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$, la valeur de la dérivée logarithmique de y restera également comprise entre ces limites. Par conséquent

Chaque courbe intégrale réelle de l'équation (22) est toute entière située dans la région du plan xOy comprise entre les deux courbes

$$y = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_1(x)\,dx} \quad \text{et} \quad y = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} \lambda_2(x)\,dx}$$

où (x_0, y_0) désigne un point par lequel passe la courbe intégrale

La proposition s'applique, par exemple, à l'équation

$$y' = \frac{s_3 y^3 + s_4 y}{q_1 y^2 + q_2}$$

où, pour les valeurs réelles de x, les fonctions q_1 et q_2 de x sont de même signe; s_3 et s_4 sont fonctions de x de signes quelconques, les deux rapports $\frac{s_3}{q_1}$ et $\frac{s_4}{q_2}$ étant des fonctions bornées.

4. Pour terminer, nous ferons une application aux intégrales abéliennes

$$(25) \qquad I = \int_{x_0}^{x} y\, dx$$

y étant fonction de x définie par une relation algébrique donnée. On peut celle-ci supposer écrite sous la forme

$$(26) \qquad f(x, y) = 0$$

où f est polynome en x et y. En groupant dans f les termes: de degrés pairs et impairs, ce polynome s'écrit

$$(27) \qquad f(x, y) = y\, f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

où f_1 et f_2 sont des polynomes ne contenant que des puissances paires de y

$$(28) \qquad \begin{aligned} f_1(x, y) &= q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \cdots \\ f_2(x, y) &= p_0 + p_2 y^2 + p_4 y^4 + \cdots \end{aligned}$$

es p_i et q_i étant polynomes en x.

Les intégrales abéliennes I dont nous nous occuperons ili sont celles pour lesquelles le conditions suivantes sont remplies

1⁰ le degré de p_i ne surpasse pas celui de q_i;

2⁰ tous les polynomes q_i non identiquement nuls sont de même signe pour toutes les valeurs réelles de x.

Pour les intégrales I remplissant ces conditions on peut montrer que:

L'intégrale s'exprime, pour x réel, sous la forme

$$(29) \qquad I = \Psi_1 + \theta\, \Psi_2$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont des fontions algébrico-logaritmiques de x, finies pour toute valeur réelle de x.

Pour le faire voir, on remarquera qu'après avoir écrit $f(x, y)$ sous la forme (27), celle-ci s'écrit

$$y = -\frac{p_0 + p_2 y^2 + p_4 y^4 + \cdots}{q_0 + q_2 y^2 + q_4 y^4 + \cdots}$$

d'où l'ou voit, comme précédemment, que la valeur y est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur $R_1(x)$ et $R_2(x)$ des rapports

$$-\frac{p_0}{q_0}\,,\ -\frac{p_2}{q_2}\,,\ -\frac{p_4}{q_4}\,,\ \dots \tag{30}$$

(qui sont fonctions rationnelles de x, ainsi que R_1 et R_2), et la démonstration s'achève facilement.

Les fonctions Ψ_1 et Ψ_2 de la formule (29) sont

$$\Psi_1=\int_{x_0}^{x} R_1(x)\,dx$$

$$\Psi_2=\int_{x_0}^{x}[R_2(x)-R_1(x)]\,dx;$$

elles sont finies pour toute valeur réelle de x et s'expriment par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Les fonctions rationnelles R_1 et R_2 peuvent coincider tantôt avec une paire de fonctions (30), tautôt avec une autre paire, pour les x compris dans divers intervalles entre $-\infty$ et $+\infty$, mais la proposition n'en reste pas moins vraie.

Les limites 0 et 1 de θ sont effectivement atteintes pour les valeurs particulières de x, racines réelles communes aux équations algébriques

$$p_i\,q_f - p_f\,q_i = 0$$

Pour ces valeurs de x s'effectue le passage d'une paire de fonctions R_1 et R_2 à une autre, mais Ψ_1 et Ψ_2 s'expriment toujours par des fonctions algébriques et logarithmiques de x.

Comme exemple nous citerons le cas de l'intégrale I dans laquelle y est la fonction algébrique de x définie par la relation cubique en y

$$X_0+X_1\,y+X_2\,y^2+X_3\,y^3=0$$

où les X sont polynomes en x parmi lesquels X_1 et X_3 sont positifs pour toute valeur réelle de x. Le rôle de Ψ_1 et Ψ_2 est joué par les intégrales

$$\Psi_1 = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_0}{X_1}\, dx$$

$$\Psi_2 = -\int_{x_0}^{x} \left(\frac{X_2}{X_3} - \frac{X_0}{X_1} \right) dx$$

fonctions algébrico-logarithmiques de x.