Le théorème sur l'approximation des fonctions continues

Par

PETAR MUZEN

La suite $\{ \varphi_k(x) \}$ de fonctions réelles et continues, déterminées dans l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ s'appelle „base", si de l'ensemble de combinaisons linéaires de ces fonctions on peut extraire une suite partielle, qui tend uniformément dans tout l'intervalle $[a, b]$ vers une fonction donnée.

F. Riesz*) a prouvé que la condition nécessaire et suffisante, pour que $\{\varphi_k(x)\}$ soit une base, consiste dans le fait que la seule solution à variation bornée dans $[a, b]$ du système

$$\int_a^b \varphi_k(x)\, d\,\alpha(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

soit $\alpha(x) =$ const. à un ensemble dénombrable près.

Dans cette note je démontre un théorème d'approximation, qui se trouve implicitement dans le cas $\varphi_k = x^k$) dans la démonstration d'Ostrowski**) du théorème de Lerch.

Théorème. *Supposons que chaque fonction $\varphi_k(x)$ a une dérivée. Si pour chaque intervalle $g \leqslant x \leqslant h$ $(a \leqslant g < h \leqslant b)$ on peut extraire de l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_k'(x)$*

---

*) F. Riesz. Sur certains systèmes des équations fonctionnelles. Comptes rendus. 150. 667. 1910.

**) Ostrowski. Über den Lerchschen Satz. Jahresbericht Mat.—Vereinigung 43. 20—23. 1933.

une suite $\{ l_n(x) \}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, *qui tend uniformément vers l'infini pour* $g + \delta \leqslant x \leqslant h - \delta$, *pour chaque* $0 < \delta < \frac{h-g}{2}$ *et est uniformément bornée en valeur absolue pour* $a \leqslant x \leqslant g$ *et* $h \leqslant x \leqslant b$, *alors la suite* $1, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ *sera une base dans l'intervalle* $[a, b]$.

Démonstration. Cherchons la solution à variation bornée du problème de Riesz

$$\int_a^b \varphi_k(x)\, d\, \alpha(x) = 0 \qquad (\varphi_0 = 1;\ k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

à condition limitative $\alpha(b) = 0$.

Pour chaque fonction à variation bornée dans l'intervalle $[a, b]$ nous pouvons former une suite d'intervalles au nombre fini ou infini, qui recouvrent complètement l'intervalle $[a, b]$ et n'empiètent pas les uns sur les autres et dans chacun desquels la fonction considérée ne change pas de signe, excepté au plus un ensemble dénombrable.

Supposons qu'un tel système d'intervalles est formé pour la fonction $\alpha(x)$ et prenons un tel intervalle $g < x < h$.

D'après l'hypothèse il existe une suite $\{ l_n(x) \}$ de combinaisons linéaires de $\varphi_k'(x)$, qui tend uniformément vers l'infini avec n dans l'intervalle $g + \delta \leqslant x \leqslant h - \delta$ et une telle que $| l_n(x) | < 1$ pour $a \leq x \leq g$ et $h \leq x \leq b$.

En général, $\{l_n(x)\}$ ne tendra pas uniformément vers l'infini dans tout l'intervalle $g \leq x \leq h$, et comme nous avons besoin d'une convergence uniforme, nous prenons l'intervalle $g + \delta \leq x \leq h - \delta$.

Dans chaque pareil intervalle, en vertu de notre supposition, la suite $\{l_n(x)\}$ est uniformément convergente.

La fonction $\mu_n(x) = \int_a^x l_n(x)\, dx$ est une combinaison linéaire des fonctions $1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ Par conséquent, si $\alpha(x)$ est la solution du problème de Riesz, on aurait

$$\int_a^b \mu_n(x)\, d\,\alpha(x) = 0 \qquad (n=1, 2, 3, \cdots) .$$

En intégrant partiellement, on obtient

$$\int_a^b \mu_n(x)\, d\,\alpha(x) = \alpha(b)\,\mu_n(b) - \alpha(a)\,\mu_n(a) - \int_a^b \alpha(x)\, l_n(x)\, dx = 0 .$$

Mais comme $\mu_n(a) = \alpha(b) = 0$, il en résulte

$$\int_a^b \alpha(x)\, l_n(x)\, dx = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\int_g^h \alpha(x)\, l_n(x)\, dx = -\int_a^g \alpha(x)\, l_n(x) dx - \int_h^b \alpha(x)\, l_n(x)\, dx .$$

Mais comme $|l_n(x)| < 1$ pour $a \leq x \leq g$ et $h \leq x \leq b$, on en déduit

$$\text{(1)} \qquad \left| \int_g^h \alpha(x)\, l_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^g |\alpha(x)|\, dx + \int_h^b |\alpha(x)|\, dx .$$

Puisque, d'après l'hypothèse, $\alpha(x)$ dans $[g, h]$ a presque partout le même signe et $l_n(x)$ est positif, on a

$$\text{(2)} \qquad \left| \int_g^h \alpha(x)\, l_n(x)\, dx \right| = \int_g^h |\alpha(x)|\, l_n(x)\, dx .$$

Donc, d'après (1) et (2)

$$\int_g^h |\alpha(x)|\, l_n(x)\, dx \leq \int_a^b |\alpha(x)|\, dx .$$

Comme

$$\int_{g+\delta}^{h-\delta} |\alpha(x)|\, l_n(x)\, dx \leq \int_g^h |\alpha(x)|\, l_n(x)\, dx ,$$

pour tout δ assez petit et positif, on aura

$$\int_{g+\delta}^{h-\delta} | \alpha(x) | l_n(x)\, dx \leqq \int_a^b | \alpha(x) | \, dx \, .$$

Si l'on se donne arbitrairement le nombre positif τ, on aura $l_n(x) > \tau \, (n > n_0)$, par suite on aura, d'après nos hypothèses,

$$\int_{g+\delta}^{h-\delta} | \alpha(x) | \, dx \leqq \frac{1}{\tau} \int_a^b | \alpha(x) | \, dx \, .$$

En laissant τ augmenter infiniment, nous obtiendrons

$$\int_{g+\delta}^{h-\delta} | \alpha(x) | \, dx = 0$$

pour chaque δ assez petit, positif et, par suite, $\alpha(x) = 0$ partout, excepté un ensemble dénombrable.

Comme (g, h) est un intervalle arbitraire dans lequel $\alpha(x)$ a presque partout le même signe, il s'en suit que $\alpha(x) = 0$ presque partout dans $[a, b]$ et l'équation $\int_a^b d\,\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a) = 0$ nous donne $\alpha(a) = 0$.

Par conséquent, la solution trouvée du problème de Riesz satisfait parfaitement aux conditions du théorème de Riesz; il s'en suit que $\{\varphi_k(x); 1\}$ est une base dans $[a, b]$. Pour le cas de la suite $\{x^k\}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ nous pouvons prendre comme $\{l_n(x)\}$ la fonction formée par Ostrowski, $l_n(x) = [1 - (x-g)(h-x)]^n$. Il s'en suit que $\{x^k\}$ est la base dans l'intervalle $[a, b]$. Ainsi, ceci nous fournit encore une démonstration du théorème de Weierstrass de l'approximation des fonctions continues par des polinômes.