Über die Anzahl der Zahlen $\equiv -1 \pmod{d}$ die keinen Primteiler derselben Form haben

Von

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

§ 1. In dieser Note untersuche ich die Anzahl derjenigen Zahlen einer arithmetischen Progression $dn - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, die keinen Primteiler $\equiv -1 \pmod{d}$ haben. Wird mit $A_d(x)$ die Anzahlfunktion der Zahlen $\equiv -1 \pmod{d}$ die $\leqslant x$ und keinen Primteiler $\equiv -1 \pmod{d}$ haben bezeichnet so gilt diesbezüglich erstens folgender

Satz I.

$$A_d(x) = \begin{cases} \infty & \textit{bei } x \to \infty \textit{ wenn } d \neq 2, 3, 4 \textit{ und } 6 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Diesen Satz beweise ich ganz elementär in § 2 Die Frage nach dem Asymptotischen Verhalten der Funktion $A_d(x)$ beantworte ich im Falle $d = 5$ durch den

Satz II. *Es ist*

$$A_5(x) \sim A \frac{x}{\lg(x)^{1/4}}$$

wo A die im Hilfssatz B definierte Konstante ist [1]).

---

1) Für beliebige d kann man trivialerweise die schwächere Formel

$$A_d(x) = O\left\{\frac{x}{(lg\, x)^{\alpha}}\right\}, \quad \frac{1}{\alpha} = d \prod_{p/d}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

angeben.

Der Beweis des Satzes II wird nach üblicher Methode der analytischen Zahlentheorie geführt. In § 3 (Hilfssatz A) wird die Funktion

$$V(s) = \sum \frac{a(n)}{n^s}$$

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \equiv -1 \pmod{5} \text{ keinen Primteiler } \equiv -1 \pmod{5} \text{ hat} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

durch bekannte Funktionen ausgedrückt und gezeigt (Hilfssatz B) dass

$$V(s) = \frac{A}{(s-1)^{3/4}} + \frac{B}{(s-1)^{1/4}} + (s-1)^{3/4} V_1(s) + (s-1)^{1/4} V_2(s),$$

wo $V_1(s)$ und $V_2(s)$ für $R(s) \geqq 1$ regulär sind. Wird in Satz 1 des § 4

$$B(x) = e^{-x} \sum_{lg\, n \leqq x} a(n) - \frac{A}{\Gamma(3/4)} x^{-1/4} - \frac{B}{\Gamma(1/4)} x^{-3/4}$$

$$c = 1, \qquad a = 1/4$$

gesetzt, und C so gewählt, dass

$$(1,1) \qquad e^x \{B(x) + C x^{-1/4}\} \text{ nicht abnehmend}$$

für $x \geqq 1$ ist, so sind einerseits wegen

$$\int_0^\infty e^{-su} B(u)\, du = \frac{1}{s+1} V(s+1) - \frac{A}{s^{3/4}} - \frac{B}{s^{1/4}}$$

und anderseits wegen (1, 1) die Voraussätzungen des Satzes 1 erfüllt. Aus der Behauptung des Satzes 1 folgt dann

$$x^{1/4} \left| e^{-x} \sum_{lg\, n \leqq x} a(n) - \frac{A}{\Gamma(3/4)} x^{-1/4} - \frac{B}{\Gamma(1/4)} x^{-3/4} \right| = o(1)$$

d. h.

$$A_5(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n) \sim \frac{A}{\Gamma(3/4)} \frac{x}{(lg\,x)^{1/4}}, \quad x \to \infty .$$

§ **2. Beweis des Satzes I.** Offenbar genügt es zu zeigen dass mindenstens eine Zahl $\equiv -1 \pmod{d}$, $d \neq 2, 3, 4$ und 6 existiert die keinen Primteiler derselben Form hat. Sei $d \geqslant 3$. Ich beweise zuerst:

a) Alle Zahlen der Folge $dn-1$, $n = 1, 2, \ldots$, *haben dann und nur dann mindenstens einen Primteiler* $\equiv -1 \pmod{d}$, *wenn alle* $dk-1$, $k = 1, 2, \ldots, d-3$ *Primzahlen sind.*

I) Angenommen diese Bedingung sei nicht hinreichend. Es sei also

$$(2,1) \qquad dk - 1 = \text{Primzahl für } k = 1, 2, \ldots, d-3$$

und es existiere wenigstens ein $dn-1$, $n > d-3$ so dass alle seine Primteiler $\not\equiv -1 \pmod{d}$ sind und N_d sei die kleinste dieser Zahlen. Also

$$(2,2) \qquad N_d = (dp_1 + p_2)(dq_1 + q_2) \equiv -1 \pmod{d}$$

wo $dq_1 + q_2$ eine Primzahl sein soll. Wegen

$$1 \leqslant p_2 \leqslant d-1, \quad 1 \leqslant q_2 < d-1$$

und (2, 2) d. h.

$$(2,3) \qquad p_2 q_2 = dq - 1$$

ist

$$1 \leqslant p_2 q_2 < (d-1)^2$$

also

$$1 \leqslant q < d-2.$$

Nach der Voraussätzung (2, 1) ist also $p_2 q_2$ eine Primzahl. Ist $p_2 = 1$ so wäre wegen (2, 3), $q_2 \equiv -1 \pmod{d}$ gegen die Voraussätzung dass $dq_1 + q_2 \not\equiv -1 \pmod{d}$. Sei $q_2 = 1$ also wegen (2, 3), $dp_1 + p_2 \equiv -1 \pmod{d}$. Dann ist entweder $dp_1 + p_2$ eine zusammengesetzte Zahl gegen die Voraussätzung dass N_d die kleinste Zahl $\equiv -1 \pmod{d}$ ist die keinen Primteler $\equiv -1 \pmod{d}$

hat oder ist dp_1+p_2 eine Primzahl gegen die Voraussätzung dass N_d keinen Primteiler $\equiv -1 \pmod{d}$ hat.

II) Nehmen wir jetzt an, dass die unter *a*) erwähnte Bedingung nicht notwendig sei. Es existiere also ein k, $1 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant d-3$ so dass $dk-1$ eine zusammengesetzte Zahl ist und dass sie mindestens einen Primteiler $\equiv -1 \pmod{d}$ hat. Dann ist

$$(2,4)\qquad dk-1=(d-i)\,d-1=c\,(dm-1),\quad i\geqslant 3,\quad c\geqslant 2,\quad m\geqslant 1$$

wo $dm-1$ eine Primzahl ist. d_1 und d_2 seien die Wurzeln der Gleichung (2,4) d. h. der Gleichung

$$d^2-d\,(i+cm)+(c-1)=0.$$

Wegen $i\geqslant 3$ ist

$$i+cm\geqslant 3+c>c-1$$

also

$$d_1+d_2>d_1\,d_2\ ,$$

und da die Wurzeln $\geqslant 0$ sein müssen so ist eine der Wurzeln entweder gleich 0 oder gleich 1. Im ersten Falle wäre $c=1$ gegen die Voraussätzung $c\geqslant 2$. Im zweiten Falle wäre

also
$$\left.\begin{aligned} c-1&=d_l\\ i+cm&=d_l+1\end{aligned}\right\}\ l=1 \text{ oder } 2$$

was wegen $i\geqslant 3$ und $m\geqslant 1$ unmöglich ist.

b) Der Satz wird also bewiesen wenn ich noch zeige: *die Diophantische Gleichung*

$$(2,5)\qquad dY-1=rX,\qquad d\neq 3,4 \textit{ und } 6$$

hat mindenstens eine ganzzahlige Lösung mit $1\leqslant Y\leqslant d-3$ $X>1$ *und* $r>1$.

III) Für jedes $d\neq 3$, 4 und 6 existiert ein zu d teilerfremdes r, $2\leqslant r\leqslant d-3$. Für ungerade d leistet schon die Zahl 2 das gewünschte. Sei $d=2n$ und p_d die grösste Primzahl $\leqslant d-3$. Bekanntlich[2]) läst sich elementar beweisen dass für jede Primzahl $p_m \geqslant 5$

$$p_{m+1} < (p_1 p_2 \ldots p_m)^{1/2}$$

ist. Existiert nun kein zu d teilerfremdes $r \leqslant d-3$ so müsste

$$d = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots p_d^{\alpha_d}, \qquad \alpha_i \geqslant 1$$

sein. Dann wäre aber wegen

$$p_{d+1} < (p_1 p_2 \ldots p_d)^{1/2} \leqslant p_1 p_2 \ldots p_d - 1 \leqslant 2n-1$$

d. h. wegen

$$p_{d+1} \leqslant 2n-2$$

auch $p_{d+1} \leqslant 2n-3$ gegen die Voraussätzung dass p_d die gröste Primzahl $\leqslant 2n-3$ ist.

IV) Da bekanntlich für $(r, d)=1$ die Gleichung (2.5) immer Lösungen mit

$$0 < Y < r \quad \text{und} \quad 0 < X$$

besitzt, so ist für $d \neq 3, 4$ und 6 und, nach III) stets vorhandenen, r wegen

$$d-1 \leqslant dY - 1 = rX < (d-2)X$$

sicher $X > 1$ w. z. b. w.

§ 3. Mit $\omega_{j,n}$ bezeichne ich durchwegs Primzahlen die

$$\omega_{j,n} \equiv j \pmod{5}$$

sind.

Hilfssatz A. *Sei*

$$V(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

---

[2]) Bonze, Archiv d. Math. u. Phys. (3) Bd, 12, S. 292—295, (1907).

Dann ist wenn $i=\sqrt{-1}$ *gesezt wird*

$$(3,1)\quad \left\{\begin{aligned} V(s) = \frac{1}{4} \prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{1,n}^s}} \Bigg\{ & \prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{2,n}^s}} \prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{3,n}^s}} + \\ & + \prod_n \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_{2,n}^s}} \prod_n \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_{3,n}^s}} - \\ & - \prod_n \frac{1}{1+\frac{i}{\omega_{2,n}^s}} \prod_n \frac{1}{1-\frac{i}{\omega_{3,n}^s}} - \\ & - \prod_n \frac{1}{1-\frac{i}{\omega_{2,n}^s}} \prod_n \frac{1}{1+\frac{i}{\omega_{3,n}^s}} \Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Beweis. Ich untersuche zuerst etwas näher die Form derjenigen Zahlen $m \equiv -1 \pmod{5}$ die nicht durch $\omega_{-1,n}$ und $\omega_{1,n}$ teilbar sind. $\omega_{2,n}$ und $\omega_{3,n}$ sind die Primteiler solcher Zahlen da der Rest 4 wegen $4=5-1$ nicht vorkommen kann. Diese Zahlen haben also die Form

$$m = \omega_{2,1}^{\alpha_1}\, \omega_{2,2}^{\alpha_2} \dots \omega_{3,1}^{\beta_1}\, \omega_{3,2}^{\beta_2} \dots$$

und sind $\equiv 2^{\sum \alpha_i}\, 3^{\sum \beta_i} \pmod{5}$. Wird $\sum \alpha_i = \alpha$ und $\sum \beta_i = \beta$ gesetzt so muss wegen $m \equiv -1 \pmod{5}$

$$2^\alpha 3^\beta \equiv -1 \pmod{5}$$

sein. Die Kongruenz ist dann und nur dann erfüllt wenn

$$(3,2) \qquad \alpha \equiv 2 \pmod{4} \text{ und } \beta \equiv 0 \pmod{4},$$

oder

$$(3,3) \qquad \alpha \equiv 0 \pmod{4} \text{ und } \beta \equiv 2 \pmod{4},$$

oder

$$(3,4) \qquad \alpha \equiv 1 \pmod{4} \text{ und } \beta \equiv 3 \pmod{4},$$

oder

(3, 5) $\qquad \alpha \equiv 3 \pmod{4}$ und $\beta \equiv 1 \pmod{4}$.

Dies ist leicht einzusehen.

Also ist

$$(3,6) \quad \sum \frac{a(n)}{n^s} = \prod_n \frac{1}{1-\dfrac{1}{\omega_{1,n}^s}} \sum \frac{1}{\omega_{2,1}^{\alpha_1 s}\,\omega_{2,2}^{\alpha_2 s}\cdots\omega_{3,1}^{\beta_1 s}\,\omega_{3,2}^{\beta_2 s}\cdots},$$

wo $\sum \alpha_i$ und $\sum \beta_i$ den Kongruenzen (3, 2), (3, 3), (3, 4) und (3, 5) genügen müssen. Nun ist für $R(s) > 1$ wenn anstatt 2 oder 3, l gesetzt wird

$$F_{0,l}(s) = \prod_n \frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_{l,n}^s}} + \prod_n \frac{1}{1-\dfrac{1}{\omega_{l,n}^s}} +$$

$$+ \prod_n \frac{1}{1+\dfrac{i}{\omega_{l,n}^s}} + \prod_n \frac{1}{1-\dfrac{i}{\omega_{l,n}^s}}$$

$$= 4 \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots \equiv 0 \pmod{4}} \frac{1}{\omega_{l,1}^{\gamma_1 s}\,\omega_{l,2}^{\gamma_2 s}\cdots},$$

$$F_{1,l}(s) = \prod_n \frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_{l,n}^s}} + \prod_n \frac{1}{1-\dfrac{1}{\omega_{l,n}^s}} -$$

$$- \prod_n \frac{1}{1+\dfrac{i}{\omega_{l,n}^s}} - \prod_n \frac{1}{1-\dfrac{i}{\omega_{l,n}^s}}$$

$$= 4 \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots \equiv 2 \pmod{4}} \frac{1}{\omega_{l,1}^{\gamma_1 s}\,\omega_{l,2}^{\gamma_2 s}\cdots};$$

$$F_{2,e}(s) = \prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{l,n}^s}} - \prod_n \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_{l,n}^s}} +$$

$$+\frac{1}{i}\prod_n \frac{1}{1+\frac{i}{\omega_{l,n}^s}} - \frac{1}{i}\prod_n \frac{1}{1-\frac{i}{\omega_{l,n}^s}}$$

$$= 4 \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\, 4)} \frac{1}{\omega_{l,1}^{\gamma_1 s}\,\omega_{l,2}^{\gamma_2 s}\cdots}$$

und

$$F_{3,l}(s) = \prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{l,n}^s}} - \prod_n \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_{l,n}^s}} +$$

$$-\frac{1}{i}\prod_n \frac{1}{1+\frac{i}{\omega_{l,n}^s}} + \frac{1}{i}\prod_n \frac{1}{1-\frac{i}{\omega_{l,n}^s}}$$

$$= 4 \sum \frac{1}{\omega_{l,1}^{\gamma_1 s}\,\omega_{l,2}^{\gamma_2 s}\cdots}\ .$$

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots \equiv 3 \ (\mathrm{mod.}\ 4).$$

Also ist

$$\frac{1}{16}\left\{F_{0,2}(s)\,F_{1,3}(s)+F_{0,3}(s)\,F_{1,2}(s)+F_{2,2}(s)\,F_{3,3}(s)+F_{2,3}(s)\,F_{3,2}(s)\right\} =$$

$$= \sum \frac{1}{\omega_{2,1}^{\alpha_1 s}\,\omega_{2,2}^{\alpha_2 s}\cdots\omega_{3,1}^{\beta_1 s}\,\omega_{3,2}^{\beta_2 s}\cdots}\ ,$$

wo $\Sigma\,\alpha_i$ und $\Sigma\,\beta_i$ den Kongruenzen (3, 2), (3, 3), (3, 4) und (3,5) genügen. Werden nun in dieser Formel die F explicit geschrieben und mit $\prod_n \frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{l,n}^s}}$ multipliciert, so bekommt man die rechte Seite der Formel (3,1). Diese ist aber wegen (3,6) gleich $\sum \frac{a(n)}{n^s}$.

Hilfssatz *B. Es ist*

$$V(s)=\frac{A}{(s-1)^{3/4}}+\frac{B}{(s-1)^{1/4}}+(s-1)^{3/4}V_1(s)+(s-1)^{1/4}V_2(s)$$

wo $V_1(s)$ *und* $V_2(s)$ *für* $R(s)\geqslant 1$ *regulär sind und* A *und* B *durch*

$$A=\frac{1}{4}\lim_{s=1}(s-1)^{3/4}\prod_{l=1}^{3}\prod_{n}\frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{l,n}^{s}}}$$

$$B=\frac{1}{4}\lim_{s=1}(s-1)^{1/4}\prod_{n}\frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{1,n}^{s}}}\sum_{k,l=2,3}\prod_{n}\frac{1}{1+\frac{i}{\omega_{k,n}^{s}}}\prod_{n}\frac{1}{1-\frac{1}{\omega_{l,n}^{s}}}$$

definiert sind.

Beweis. Die in $V(s)$ vorkommenden Funktionen haben die Gestalt

$$\prod\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\omega_{l,n}^{s}}},\quad l=1,2,3;\ \varepsilon=\pm 1,\pm i\,. \tag{3,7}$$

Jede dieser Funktionen kann auf die Form

$$e^{-\varepsilon\sum\frac{1}{\omega_{l,n}^{s}}}\prod_{n}\frac{1}{1-\frac{\varepsilon^2}{\omega_{l;n}^{2s}}}\prod_{n}e^{\varepsilon\frac{1}{\omega_{l,n}^{s}}}\left((1-\frac{\varepsilon}{\omega_{l,n}^{s}}\right)$$

gebracht werden. Die zwei letzten Faktoren sind offenbar für $R(s)>\frac{1}{2}$ regulär. Der erste Faktor hingegen hat die Gestalt

$$(s-1)^{\frac{\varepsilon}{4}}\,W(s)$$

wo $W(s)$ für $R(s)\geqslant 1$ regulär ist; denn die logarithmische Ableitung $\sum\frac{\lg\omega_{l,n}}{\omega_{l,n}^{s}}$ von $-\sum\frac{1}{\omega_{l,n}^{s}}$ hat bekanntlich[3]) auf der Gerade $R(s)=1$ nur einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{4}$.

[3]) E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1 (1909), S. 467.

Werden die Ausdrücke (3,7) in der Form

$$(s-1)^{\frac{\varepsilon}{4}} W_{l,\varepsilon}(s), \quad l = 1, 2, 3; \quad \varepsilon = \pm 1, \pm i,$$

geschrieben und in die Formel (3,1) eingesetzt so bekommt man

$$V(s) = (s-1)^{-3/4} W_1(s) + (s-1)^{-1/4} W_2(s) + (s-1)^{1/4} W_3(s)$$

wo die $W_l(s)$, $l = 1, 2, 3$ für $R(s) \geqq 1$ regulär sind. Daraus folgt die Behauptung.

§ 4. Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Landau-Heilbron [4]).

Satz 1. *Sei*

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-su} B(u)\, du \quad \textit{konvergent für} \quad \sigma > 0, \; s = \sigma + it$$

(4,1) $e^{cx}\{B(x) + Cx^{-\alpha}\}$, $c \geqq 0$, $C > 0$, $0 \leqq \alpha < 1$ *nicht abnehmend für* $x \geqq x_0$,

$$(4,2) \qquad \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} e^{iyt}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) h(\sigma + it)\, dt \to \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} e^{iyt}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) \varphi(t)\, dt, \; \sigma \to 0, \; \lambda > 0$$

und

$$(4,3) \qquad \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} e^{iyt}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) \varphi(t)\, dt = o\left(\frac{1}{y^\alpha}\right), \; y \to \infty$$

{ (4,2) und (4,3) sind insbesondere erfüllt, wenn $\varphi(t) = t^\beta \varphi^*(t)$, $\beta \geqq 0$ und $\varphi^*(t)$ für $|t| \leqq 2\lambda$ regulär ist }. *Dann ist*

$$\limsup_{x=\infty} |x^\alpha B(x)| < m(\lambda) \to 0, \; \lambda \to \infty.$$

Beweis. O. B. d. A. sei $x_0 = 1$ und $e^{cx}\{B(x) + Cx^{-\alpha}\} \geqq 0$ für $x \geqq 0$. Für $\sigma > 0$ ist

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} e^{iyt}\left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) h(\sigma + it)\, dt = \int_0^\infty e^{-\sigma u} B(u) \frac{\sin^2 \lambda (y-u)}{\lambda (y-u)^2}\, du.$$

[4]) E. Landau, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr. 30 (1932), S. 525—527.

Strebt σ gegen o, so existiert wegen (4,2) der Grenzwert links und kann unter dem Integralzeichen gebildet werden. Wegen (4,1) d. h.

$$e^{ct}\{B(t)+Ct^{-\alpha}\}\geqslant e^{c}\{B(1)+C\} \text{ für } t\geqslant 1$$

gilt dasselbe vom Integral rechts. Also ist wenn man noch (4,3) beachtet

$$\int_{-\infty}^{\lambda y} B\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv = o\left(\frac{1}{y^{\alpha}}\right). \tag{4,4}$$

a) Wegen (4,4) ist für $y>\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$o(1)+C\int_{-\infty}^{\lambda y}\left(\frac{y}{y-\frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv =$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda y} y^{\alpha}\left\{B\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)+\frac{C}{\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)^{\alpha}}\right\}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv$$

also wegen (4,1)

$$\geqslant\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} y^{\alpha}\left\{B\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)+\frac{C}{\left(y-\frac{v}{\lambda}\right)^{2}}\right\}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv$$

$$> e^{-\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}}\, y^{\alpha}\left\{B\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)+\frac{C}{\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha}}\right\}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv$$

d. h.

$$y^{\alpha} B\left(y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\leqq\frac{C}{\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv}\left\{e^{\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}}\int_{-\infty}^{\lambda y}\left(\frac{y}{y-\frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{y}{y-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right)^{\alpha}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv+o(1)\right\}.$$

Also ist

$$(4,5)\quad \limsup_{y=\infty} y^{\alpha} B(y) < C \left\{ e^{\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}} \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv}{\int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv} - 1 \right\} =$$

$$< P_1(\lambda) \to 0\,,\ \lambda \to \infty\,.$$

b) Wegen (4.5) ist $y^{\alpha} B(y)$ beschränkt und $< k\, P_1(\lambda)$. Wird (4,4) berücksichtigt so ist für $y > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$o(1) = y^{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\lambda y} B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv = y^{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} + y^{\alpha} \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} + y^{\alpha} \int\limits_{+\sqrt{\lambda}}^{\lambda y}$$

$$< k\, P_1(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \left(\frac{y}{y - \frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv + \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} y^{\alpha} B\left(y - \frac{v}{\lambda}\right) \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv +$$

$$+ k\, P_1(\lambda) \int\limits_{+\sqrt{\lambda}}^{\lambda y} \left(\frac{y}{y - \frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv$$

also wegen (4,1)

$$o(1) < 2\, k\, P_1(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\lambda y} \left(\frac{y}{y - \frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv +$$

$$+ e^{\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}} y^{\alpha} \left\{ B\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{C}{\left(y + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha}} \right\} \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv -$$

$$- C \int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \left(\frac{y}{y - \frac{v}{\lambda}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv$$

d. h.

$$y^\alpha B\left(y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \geqq \frac{C}{\int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv}\left[\int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left\{e^{-\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}}\left(\frac{y}{y-\frac{v}{\lambda}}\right)^\alpha - \left(\frac{y}{y+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}\right)^\alpha\right\}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv - \right.$$

$$\left. - 2kP_1(\lambda)\, e^{-\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}}\int\limits_{-\infty}^{\lambda y}\left(\frac{y}{y-\frac{v}{\lambda}}\right)^\alpha\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv + o(1)\right].$$

Also ist

$$\liminf_{y=\infty} y^\alpha B(y) \geqq C\left(e^{-\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right) - 2kP_1(\lambda)\, e^{-\frac{2c}{\sqrt{\lambda}}}\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv}{\int\limits_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 dv} =$$

$$\geqq P_2(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to \infty.$$