Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynomes

Par

DRAGOLJUB MARKOVITCH

Dans ce travail nous allons chercher la limite supérieure des modules de $p < n$ zéros du polynome

$$(1)\quad P(x)=a_n x^n+\cdots+a_{p+h}x^{p+h}+\cdots+a_p x^p+ a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_0=0\,,\quad 1\leqslant h\leqslant n-p$$

dont certains coefficients dépendent des paramètres arbitraires. Ce problème, posé par M. Landau[1]) pour un zéro, a été généralisé par M. Montel[2]) pour p zéros, et, après lui, continué par MM. Van Vleck[3]), Biernacki[4]), Dieudonné[5]) et Ballieu[6]). Le résultat général pour une équation du type (1) peut être exprimé ainsi :

1) Landau. Ueber den Picardschen Satz (Vierteljarsschaft der Nat. Gesel. in Zürich, 51. 1906).

2) Montel. Sur les modules des zéros des polynomes (An. de l'école Norm Sup., 40, 1923).

3) Van Vleck. On limits to the absolute value of the roots of a polynomial (Bul. de la Soc. math. de France 53, 1932).

4) Biernacki. Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Bul. international de l'Académie polonaise de Sc. et de Let., série A, 1927).

5) Dieudonné. Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe (An. de l'Ec. Norm. Sup., 48, 1931)

6) Ballieu. Limitations en module et localisations des zéros des polynomes (Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liége, 4-e série, t. I. fasc. 2—3).

Etant donnée une suite de coefficients $a_0, a_1, \ldots a_{p-1}, a_{p+h}$ $(0 \leqslant h \leqslant n-p)$ *et l'exposant* n, *la limite supérieure des modules de* p *zéros est représentée par la racine positive de l'équation*

$$(2) \quad |a_{p+h}|\,\varrho^{p+h} = |a_{p-1}|\binom{h}{o}\binom{n-p+1}{h+1}\varrho^{p-1} + $$

$$+ |a_{p-2}|\binom{h+1}{1}\binom{n-p+2}{h+2}\varrho^{p-2} + \cdots + |a_0|\binom{h+p-1}{p-1}\binom{n}{h+p},$$

les autres coefficients pouvant être tout à fait arbitraires.

Particulièrment, M. Van Vleck a attiré l'attention sur le fait suivant: sous les conditions énoncées la seule suite de $p+1$ coefficients fixés où il existe une borne supérieure aux modules de p zéros est celle du théorème précédant [c. à. d. $a_0, a_1, \ldots a_{p-1}$, a_{p+h} $(0 \leqslant h \leqslant n-p)$ donnés].

En exposant d'abord un nouveau procédé de détermination des limites, nous allons retrouver l'équation (2), puis, en modifiant légèrement le problème, nous allons obtenir les autres limitations des zéros en modules. Donc nous nous proposons de chercher les limites supérieures connaisant une relation (égalité ou inégalité) entre deux coefficients quelconques.

Théorèmes auxiliaires.

Théorème A. *Soit* ν_i, $i=1, 2, \ldots, n$ *une suite de nombres entiers et positifs croissant avec l'indice, le quotient*

$$(3) \quad U(x\ x_n, \ldots, x_2, x_1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x^{\nu_1} & x^{\nu_2} & \ldots & x^{\nu_{n-1}} & x^{\nu_n} \\ 1 & x_n^{\nu_1} & x_n^{\nu_2} & \ldots & x_n^{\nu_{n-1}} & x_n^{\nu_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_2^{\nu_1} & x_2^{\nu_2} & \ldots & x_2^{\nu_{n-1}} & x_2^{\nu_n} \\ 1 & x_1^{\nu_1} & x_1^{\nu_2} & \ldots & x_1^{\nu_{n-1}} & x_1^{\nu_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \end{vmatrix}}$$

de deux déterminants $\Delta\,(1, x_n^{\nu_1} \dots x_2^{\nu_{n-1}}, x_1^{\nu_n})$ et $P\,(1, x_n, \dots, x_2^{n-1}, x_1^n)$ *représente une fonction homogène* U *de degré* $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n - \frac{n}{2}(n+1)$ *et dont les coefficients sont positifs.*

Pour $n=1$ le théorème est évident. Supposons - le établi pour la valeur n de l'indice. On peut démontrer qu'il sera valable aussi pour $n+1$. Le déterminant P définit $\frac{n}{2}(n+1)$ différences $a_k - a_h,\ k > h$. Le déterminant Δ les contient aussi.

Du déterminant Δ on peut déduire

$$\begin{vmatrix} x^{\nu_1} - x_n^{\nu_1} & x^{\nu_2} - x_n^{\nu_2} & \dots & x^{\nu_n} - x_n^{\nu_n} \\ x^{\nu_1} - x_{n-1}^{\nu_1} & x^{\nu_2} - x_{n-1}^{\nu_2} & \dots & x^{\nu_n} - x_{n-1}^{\nu_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{\nu_1} - x_2^{\nu_1} & x^{\nu_2} - x_2^{\nu_2} & \dots & x^{\nu_n} - x_2^{\nu_n} \\ x^{\nu_1} - x_1^{\nu_1} & x^{\nu_2} - x_1^{\nu_2} & \dots & x^{\nu_n} - x_1^{\nu_n} \end{vmatrix},$$

d'où

$$M \cdot \begin{vmatrix} 1 + u_n + \cdots + u_n^{\nu_1-2} + u_n^{\nu_1-1} & 1 + u_n + \cdots + u_n^{\nu_2-2} + u_n^{\nu_2-1} & \dots & \dots 1 + u_n + \cdots + u_n^{\nu_n-2} + u_n^{\nu_n-1} \\ 1 + u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}^{\nu_1-2} + u_{n-1}^{\nu_1-1} & 1 + u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}^{\nu_2-2} + u_{n-1}^{\nu_2-1} & \dots & \dots 1 + u_n + \cdots + u_n^{\nu_n-2} + u_n^{\nu_n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 + u_2 + \cdots + u_2^{\nu_1-2} + u_2^{\nu_1-1} & 1 + u_2 + \cdots + u_2^{\nu_2-2} + u_2^{\nu_2-1} & \dots & \dots 1 + u_2 + \cdots + u_2^{\nu_n-2} + u_2^{\nu_n-1} \\ 1 + u_1 + \cdots + u_1^{\nu_1-2} + u_1^{\nu_1-1} & 1 + u_1 + \cdots\ u_1^{\nu_2-2} + u_1^{\nu_2-1} & \dots & \dots 1 + u_2 + \cdots + u_1^{\nu_n-2} + u_1^{\nu_n-1} \end{vmatrix},$$

où M et u_i sont les expressions

$$M=(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_2)(x-x_1)\,x^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n-n}$$

$$u_i=\frac{x_i}{x}\,,\qquad i=1,2,\dots,n\,.$$

Puisque les éléments du dernier déterminant sont des polynomes en $\frac{x_i}{x}$, après la décomposition, et en tenant compte des déterminants égaux à zéro, nous obtiendrons $\nu_1(\nu_2-\nu_1)\dots$ $\dots(\nu_n-\nu_{n-1})$ déterminants de deux formes suivantes

$$x^s\begin{vmatrix} 1\;x_n^{\lambda_1} & \dots\; x_n^{\lambda_{n-1}} \\ 1\;x_{n-1}^{\lambda_1} & \dots\; x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\;x_2^{\lambda_1} & \dots\; x_2^{\lambda_{n-1}} \\ 1\;x_1^{\lambda_1} & \dots\; x_1^{\lambda_{n-1}} \end{vmatrix}$$

et

$$x^s(x_1\,x_2\dots x_n)^r\begin{vmatrix} 1\;x_n^{\lambda_1} & \dots\; x_n^{\lambda_{n-1}} \\ 1\;x_{n-1}^{\lambda_1} & \dots\; x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1\;x_2^{\lambda_1} & \dots\; x_2^{\lambda_{n-1}} \\ 1\;x_1^{\lambda_1} & \dots\; x_1^{\lambda_{n-1}} \end{vmatrix},$$

s, r et λ_i étant des entiers positifs.

Ceci démontre que le déterminant considéré d'ordre $n+1$ des quantités $(x, x_n, \dots, x_1)$ est reduit en certain nombre de déterminants de la même forme mais d'ordre n, c. à. d. des quantités $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$.

Théorème B. *Soit* ν_i, $i=1,2,\dots,n$ *une suite de nombres entiers et positifs croissant avec l'indice, la limite vers laquelle tend* *le rapport* (3) *quand* $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n \to x$ *est égale à* $Nx^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n-\frac{n}{2}(n+1)}$ *où*

$$(4) \qquad N = \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{n-1} & \nu_n \\ \binom{\nu_1}{2} & \binom{\nu_2}{2} & \cdots & \binom{\nu_{n-1}}{2} & \binom{\nu_n}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{\nu_1}{n-1} & \binom{\nu_2}{n-1} & \cdots & \binom{\nu_{n-1}}{n-1} & \binom{\nu_n}{n-1} \\ \binom{\nu_1}{n} & \binom{\nu_2}{n} & \cdots & \binom{\nu_{n-1}}{n} & \binom{\nu_n}{n} \end{vmatrix}.$$

La preuve repose sur la régle de L'Hospital quand $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3$ et ainsi de suite jusqu'à $x_n \to x$.

Considérons maintenant l'équation

$$(5) \qquad Q(z) = a_n + a_{n-1} z + \cdots + a_{p+h} z^{n-p-h} + \cdots + a_p z^{n-p} + \\ + (a_{p-1} z^{n-p+1} + \cdots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n) = 0$$

obtenue en posant dans (1) $x = \frac{1}{z}$. Désignons par z_i, $i = 1, 2, \ldots, n-p$ les $n-p$ zéros de plus petit module de cette équation (en comptant une fois chaque zéro multiple) et par z un quelconque des zéros restants, alors il existe $n-p+1 = q$ relations

$$(6) \qquad Q(z) = 0, \quad Q(z_{n-p}) = 0, \ldots, \quad Q(z_2) = 0, \quad Q(z_1) = 0.$$

En les resolvant par rapport à un coefficient quelconque a_{p+h}, nous obtiendrons

$$(7) \qquad a_{p+h} = (-1)^{h+1} \sum_{i=1}^{p} a_{p-i} \frac{\Delta_i}{P},$$

où

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & z & \dots & z^{n-p-h-1} & z^{n-p-h+1} & \dots & z^{n-p} & z^{n-p+i} \\ 1 & z_{n-p} & \dots & z_{n-p}^{n-p-h-1} & z_{n-p}^{n-p-h+1} & \dots & z_{n-p}^{n-p} & z_{n-p}^{n-p+i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-p-h-1} & z_2^{n-p-h+1} & \dots & z_2^{n-p} & z_2^{n-p+i} \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-p-h-1} & z_1^{n-p-h+1} & \dots & z_1^{n-p} & z_1^{n-p+i} \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} 1 & z & \dots & z^{n-p-h} & \dots & z^{n-p} \\ 1 & z_{n-p} & \dots & z_{n-p}^{n-p-h} & \dots & z_{n-p}^{n-p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-p-h} & \dots & z_2^{n-p} \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-p-h} & \dots & z_1^{n-p} \end{vmatrix}.$$

Cependant, $\frac{\Delta_i}{P}$ étant d'après le théorème A une fonction homogène U_{i+h}, il en résulte que

$$(8) \qquad |a_{p+h}| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |U_{i+h}|\,|a_{p-i}|,$$

et si nous supposons que

$$(9) \qquad |z_i| \leqslant |z|, \quad i = 1, 2, \dots, n-p$$

on aura ainsi

$$(10) \qquad |a_{p+h}| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |a_{p-i}|\, N_i\, |z|^{i+h}.$$

Comme les coefficients des fonctions U_{i+h} sont des entiers positifs, la détermination des coefficients N_i, sous les conditions (9) n'est qu'une conséquence du théorème B,

$$N_i=\begin{vmatrix} 1\;2\ldots & n-p-h-1 & n-p-h+1 & \ldots & n-p & n-p+i \\ 0\;1\ldots & \binom{n-p-h-1}{2} & \binom{n-p-h+1}{2} & \ldots & \binom{n-p}{2} & \binom{n-p+i}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\;0\ldots & 0 & \binom{n-p-h+1}{n-p-h} & \ldots & \binom{n-p}{n-p-h} & \binom{n-p+i}{n-p-h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\;0\ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & \binom{n-p+i}{n-p} \end{vmatrix}=$$

$$=\binom{h+i-1}{i-1}\cdot\binom{n-p+i}{h+i}.$$

Posons enfin dans (10) $|z|=\frac{1}{\varrho}$, nous retrouverons l'équation (2). déjà trouvée par M. Ballieu en suivant la méthode de M. Van Vleck.

Ecrivons notre système (6) de la manière suivante

$$(11)\quad\begin{cases} Q(z) = a_n+a_{n-1}z+\cdots+a_{p+h}z^{n-p-h}+\cdots+a_{p+1}z^{n-p-1}+ \\ \qquad +a_kz^{n-k}+\pi_n(z)=0 \\ Q(z_{n-p})=a_n+a_{n-1}z_{n-p}+\cdots+a_{p+h}z_{n-p}^{n-p-h}+\cdots+a_{p+1}z_{n-p}^{n-p-1}+ \\ \qquad +a_kz_{n-p}^{n-k}+\pi_n(z_{n-p})=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Q(z_2) = a_n+a_{n-1}z_2+\cdots+a_{p+h}z_2^{n-p-h}+\cdots+a_{p+1}z_2^{n-p-1}+ \\ \qquad +a_kz_2^{n-k}+\pi_n(z_2)=0 \\ Q(z_1) = a_n+a_{n-1}z_1+\cdots+a_{p+h}z_1^{n-p-h}+\cdots+a_{p+1}z_1^{n-p-1}+ \\ \qquad +a_kz_1^{n-k}+\pi_n(z_1)=0, \end{cases}$$

où

$$\pi_n(z_i)=a_pz_i^{n-p}+\cdots+a_{k+1}z_i^{n-k-1}+a_{k-1}z_i^{n-k+1}+\cdots+$$
$$+a_1z_i^{n-1}+a_0z_i^n$$

$i=1,2,\ldots,n-p$; $h=1,2,\ldots,n-p-1$; $k=1,2,\ldots,p-1$ $(k<p)$.

On peut le résoudre par rapport à deux coefficients a_k et a_{p+h},

$$(12) \qquad a_k = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n-p-h} & \cdots & z^{n-p-1} & \pi_n(z) \\ 1 & z_{n-p} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-h} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-1} & \pi_n(z_{n-p}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-p-h} & \cdots & z_2^{n-p-1} & \pi_n(z_2) \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-r-h} & \cdots & z_1^{n-p-1} & \pi_n(z_1) \end{vmatrix}}{\Delta_k},$$

$$(12a) \quad a_{p+h} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n-p-h-1} & \pi_n(z) & z^{n-p-h+1} & \cdots & z^{n-p-1} & z^{n-k} \\ 1 & z_{n-p} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-h-1} & \pi_n(z_{n-p}) & z_{n-p}^{n-p-h+1} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-1} & z_{n-p}^{n-k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-p-h-1} & \pi_n(z_2) & z_2^{n-p-h+1} & \cdots & z_2^{n-p-1} & z_2^{n-k} \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-p-h-1} & \pi_n(z_1) & z_1^{n-p-h+1} & \cdots & z_1^{n-p-1} & z_1^{n-k} \end{vmatrix}}{\Delta_k},$$

Δ_k désignant le déterminant du système

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n-p-h} & \cdots & z^{n-p-1} & z^{n-k} \\ 1 & z_{n-p} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-h} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-1} & z_{n-p}^{n-h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-p-h} & \cdots & z_2^{n-p-} & z_2^{n-k} \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-p-h} & \cdots & z_1^{h-p-1} & z_1^{n-k} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème général: *Si dans l'équation* (1) $|a_{p+h}| \geqslant |a_k|$ $(h = 1, 2, \cdots, n - p - 1$; $k = 1, 2, \cdots, p - 1)$ *et si nous désignons par* M_ν *et* N_ν

$$(13)\quad M_\nu = \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots & n-p-h & \cdots & n-p-1 & n-\nu \\ 0\,1 \cdots & \binom{n-p-h}{2} & \cdots & \binom{n-p-1}{2} & \binom{n-\nu}{2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\,0 \cdots & 0 & \cdots & 1 & \binom{n-\nu}{n-p-1} \\ 0\,0 \cdots & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-\nu}{n-p} \end{vmatrix},$$

$$N_\nu = \text{val. abs.} \begin{vmatrix} 1\,2 \cdots & n-p-h-1 & n-p-h+1 & \cdots & n-p-1 & n-k & n-\nu \\ 0\,1 \cdots & \binom{n-p-h-1}{2} & \binom{n-p-h+1}{2} & \cdots & \binom{n-p-1}{2} & \binom{n-k}{2} & \binom{n-\nu}{2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\,0 \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n-k}{n-p-1} & \binom{n-\nu}{n-p-1} \\ 0\,0 \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-k}{n-p} & \binom{n-\nu}{n-p} \end{vmatrix}$$

la limite supérieure de p zéros de plus petit module est la racine positive de l'équation

$$(14)\quad |\,a_p\,|\,\varrho^{2p+h-k} = \sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu\,|\,M_\nu\,\varrho^{p+h-k+\nu} + \sum_{\nu=0}^{p} |\,a_\nu\,|\,N_\nu\,\varrho^\nu\,,\ \nu \neq k\,.$$

En effet, supposons donné le rapport $\dfrac{a_k}{a_{p+h}} = \lambda$. D'après les équations (12) et (12a) il viendra

$$\sum_{\nu=0}^{p} a_\nu \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n-p-h} & \cdots & z^{n-p-1} & z^{n-\nu} \\ 1 & z_{n-p} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-h} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-1} & z_{n-p}^{n-\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-p-h} & \cdots & z^{n-p-1} & z_2^{n-\nu} \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-p-h} & \cdots & z_1^{n-p-1} & z_1^{n-\nu} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^h \lambda \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n-p-h-1} & z^{n-p-h+1} & \cdots & z^{n-p-1} & z^{n-k} & z^{n-\nu} \\ 1 & z_{n-p} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-h-1} & z_{n-p}^{n-p-h+1} & \cdots & z_{n-p}^{n-p-1} & z_{n-p}^{n-k} & z_{n-p}^{n-\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-p-h-1} & z_2^{n-p-h+1} & \cdots & z_2^{n-p-1} & z_2^{n-k} & z_2^{n-\nu} \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-p-h-1} & z_1^{n-p-h+1} & \cdots & z_1^{n-p-1} & z_1^{n-k} & z_1^{n-\nu} \end{vmatrix},$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, p-1, p .$$

La division par le déterminant $\Delta(1, z_{n-p}, \cdots, z_2^{n-p-1}, z_1^{n-p})$ fournit l'équation

$$a_p = -\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu U_{p-\nu} + \lambda (-1)^h \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu U_{2p+h-k-\nu}, \quad \nu \neq k$$

où U_i désignent les fonctions homogènes indiquées au théorème A. On en déduit

$$|a_p| \leqslant \sum_{\nu=0}^{p-1} |a_\nu| \, |U_{p-\nu}| + |\lambda| \sum_{\nu=0}^{p} |a_\nu| \, |U_{2p+h-k-\nu}|,$$

d'où avec l'hypothèse

$|z_i| \leqslant |z|$, $i = 1, 2, \cdots, n-p$ et $|\lambda| \leqslant 1$, c. à. d. $|a_k| \leqslant |a_{p+h}|$,

$$(15) \qquad |a_p| \leqslant \sum_{\nu=0}^{p-1} |a_\nu| M_\nu |z|^{p-\nu} + \sum_{\nu=0}^{p} |a_\nu| N_\nu |z|^{2p+h-k-\nu}.$$

Enfin, après la transformation habituelle $|z| = \frac{1}{\varrho}$, nous obtiendrons l'équation (14).

L'indice k, comme il suit de l'exposition du théorème, peut prendre les valeurs $1, 2, \cdots, p-1$ sauf 0. Cependant la méthode est encore applicable et dans ce cas, et il en résulte:

L'équation (1), *dans laquelle est* $|a_{p+h}| \geqslant |a_0|$, *a* p *zéros de modules inférieurs ou égaux à la racine positive de l'équation*

$$(16) \qquad |a_p| \varrho^{2p+h-1} = \sum_{\nu=1}^{p-1} |a_\nu| M_\nu \varrho^{p+h+\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{p} |a_\nu| N_\nu \varrho^{\nu-1},$$

où sont

$$(17)\quad M_\nu = \begin{vmatrix} 1\;2\cdots & n-p-h & \cdots & n-p-1 & n-\nu \\ 0\;1\cdots & \binom{n-p-h}{2} & \cdots & \binom{n-p-1}{2} & \binom{n-\nu}{2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\;0\cdots & 0 & \cdots & 1 & \binom{n-\nu}{n-p-1} \\ 0\;0\cdots & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-\nu}{n-p} \end{vmatrix},$$

$$N_\nu = \begin{vmatrix} 1\;2\cdots & n-p-h-1 & n-p-h+1 & \cdots & n-p-1 & n-\nu & n \\ 0\;1\cdots & \binom{n-p-h-1}{2} & \binom{n-p-h+1}{2} & \cdots & \binom{n-p-1}{2} & \binom{n-\nu}{2} & \binom{n}{2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\;0\cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{n-\nu}{n-p-1} & \binom{n}{n-p-1} \\ 0\;0\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n-\nu}{n-p} & \binom{n}{n-p} \end{vmatrix}$$

De même le cas où l'indice h prend la valeur $h = p - n$ doit être considéré séparément. En procédant comme auparavant, il n'y a qu'à modifier les N_ν,

$$(18)\quad N_\nu = \text{val abs.} \begin{vmatrix} 1\;2\cdots & n-p-2 & n-k-1 & n-\nu-1 \\ 0\;1\cdots & \binom{n-p-2}{2} & \binom{n-k-1}{2} & \binom{n-\nu-1}{2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\;0\cdots & 0 & \binom{n-k-1}{n-p-1} & \binom{n-\nu-1}{n-p-1} \\ 0\;0\cdots & 0 & \binom{n-k-1}{n-p} & \binom{n-\nu-1}{n-p} \end{vmatrix},$$

tandis que les équations (14) et (16) restent sans modification.

Les résultats, que nous venons d'obtenir, sont surtout applicables lorsque tous les coefficients ou un certain nombre d'eux dépendent d'un paramètre variable t. Pour abréger l'ecriture citons, à titre d'un exemple, l'équation du cinquième degré

$$(19) \quad x^5 (t^2 - a^2) + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + x(t+a) + a_0 = 0 .$$

La condition $\left| \frac{a_5}{a_1} \right| \geqslant 1$ devient

$$|t - a| \geqslant 1 .$$

Puis, l'application des formules (14) et (18) donne

$$M_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 5-\nu \\ 0 & \binom{5-\nu}{2} \end{vmatrix}, \qquad N_\nu = \text{val. abs.} \begin{vmatrix} 3 & 4-\nu \\ \binom{3}{2} & \binom{4-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

$$\nu = 0, 2 \qquad\qquad \nu = 0, 2, 3$$

$$(20) \quad |a_3| \varrho^7 = 3 |a_2| \varrho^6 + 10 |a_0| \varrho^4 + 3 |a_3| \varrho^3 + 3 |a_2| \varrho^2 + 6 |a_0| .$$

Donc nous sommes conduit à formuler la proposition:

Si t désigne une quantité complexe ou réelle, située dans son plan au dehors ou sur la circonférence d'un cercle de centre a et de rayon $= 1$, il existe une lim. sup. des modules de trois zéros ne dépandant que de a_0, a_2, a_3, et elle est représentée par la racine positive de l'équation (20)