Théorèmes généraux sur les équations différentielles algébriques

Par

MICHEL PETROVITCH

Chapitre I

Sur une suite indéfinie de fonctions d'une variable

I. Systèmes et suites canoniques.

Une équation différentielle est à considérer comme intégrée lorsqu'on a exprimé la variable indépendante x et l'intégrale de l'équation y en fonction d'un paramètre t au moyen d'un nombre limité de fonctions connues.

Dans le présent Mémoire nous nous proposons de montrer qu'en ce sens l'intégration de toute équation différentielle algébrique, quel que soit son ordre, s'effectue au moyen d'un nombre limité de fonctions particulières fixes

$$(1) \qquad u_1(t), \quad u_2(t), \quad u_3(t), \quad \ldots$$

qu'on peut déterminer une fois pour toutes.

A cet égard nous allons démontrer le théorème fondammental suivant:

Il existe une suite (1) *fixe telle que la variable indépendante x et l'intégrale* (*générale ou particulière*) *de toute équation différentielle algébrique en*

$$(2) \qquad x, y, y', y'', \ldots$$

s'expriment comme fonctions d'un paramètre t au moyen d'un nombre fini des fonctions (1), *par des quadratures ou bien sans quadratures.*

La suite (1) que nous avons en vue s'obtient par l'intégration de systèmes spéciaux d'équations différentielles simultanées transcendantes. Malgré le caractère spécial et la forme particulière de ces équations, nous allons montrer que *la suite* (1) *ainsi obtenue intervient dans l'intégration, au sens ci-dessus indiqué, de toute équation différentielle algébrique.*

Considérons le système de p équations simultanées

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \varepsilon_1^1 e^{u_1} + \varepsilon_2^1 e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^1 e^{u_p} \\ \frac{du_2}{dt} &= \varepsilon_1^2 e^{u_1} + \varepsilon_2^2 e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^2 e^{u_p} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{du_p}{dt} &= \varepsilon_1^p e^{u_1} + \varepsilon_2^p e^{u_2} + \cdots + \varepsilon_p^p e^{u_p} \end{aligned}$$

où chaque coefficient ε_i^k a pour valeur 0 ou 1. Pour tout entier p le nombre de tels systèmes est limité, ainsi que le nombre de fonctions u engendrées par ces systèmes. Chacune de suites

$$(4) \qquad u_1, u_2, u_3 \ldots$$

ainsi obtenues est déterminée par le Tableau à p^2 éléments

$$(5) \qquad \begin{matrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \ldots & \varepsilon_p^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^p & \varepsilon_2^p & \ldots & \varepsilon_p^p \end{matrix}$$

qui lui correspond; le nombre de tels Tableaux est également limité.

L'augmentation du nombre p a pour effet l'adjonction de nouvelles fonctions u à celles correspondant aux nombres p plus petits.

Toutes les suites u correspondant à un nombre p donné se déterminent par l'intégration des tous les systèmes (3) correspondant à ce nombre p. Chacune de ces fonctions contiendra un certain nombre de constantes arbitraires introduites par l'intégration du système et dont les valeurs seront déterminées par des valeurs initiales des fonctions, par exemple pour $t = 0$.

L'ensemble de fonctions u, engendrées par tous les systèmes (3), forme un Tableau (U) d'éléments à trois indices, l'un désignant le système (3) auquel satisfait l'élément u, les deux autres désignant la ligne et la colonne du Tableau (5) caractérisant ce système. On peut alors *numéroter* ces éléments au moyen des entiers positifs de manière que deux éléments différents aient deux numéros différents et que chaque élément ait un numéro unique. Le Tableau (U) se trouvera ainsi transformé en une suite

$$u_1, \; u_2, \; u_3, \ldots \tag{6}$$

dont chaque terme a son numéro bien déterminé.

Comme il ressortira de ce qui suit, *toute équation différentielle algébrique se laisse ramener à un système de la forme* (3). C'est pour cette raison que les systèmes (3) seront désignés comme *systèmes canoniques* pour toutes ces équations, et que toute suite (4) engendrée par un tel système, ainsi que la suite complète (6) seront considérées comme *suites canoniques* pour les intégrales des équations différentielles algébriques.

II. Développement des fonctions des suites canoniques en séries tayloriennes.

L'exemple le plus simple des systèmes canonique, celu de l'équation

$$\frac{du_1}{dt} = e^{u_1}$$

ayant pour intégrale générale

$$u_1 = -\log(C - t),$$

ainsi que celui du système

$$\frac{du_1}{dt} = e^{u_1}, \qquad \frac{du_2}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2}$$

ayant pour intégrale générale

$$u_1 = -\log(C_1 - t),$$
$$u_2 = \frac{1}{(C_1 - t)\,[\log(C_1 - t) - C_2]}$$

montrent que les fonctions u présentent des singularités mobiles. Mais nous montrerons dans ce qui suit que:

Toute fonction u, ayant pour $t=0$ une valeur finie et déterminée est holomorphe dans un certain cercle ayant $t=0$ comme centre et dont on connaîtra le rayon; pour toutes les valeurs de t à l'intérieur de ce cercle la fonction est développable en série

$$u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \tag{7}$$

dont on connaîtra la structure des coefficients.

Pour le faire voir, remarquons que toute équation du système (3) se laisse écrire sous la forme

$$\frac{du_h}{dt} = \sum_i \varepsilon_i^h e^{u_i}, \tag{8}$$

où i doit prendre les valeurs $i=1, 2, \ldots p$. En différentiant chaque équation (8) on obtient

$$\frac{d^2u_h}{dt^2} = \sum_i \varepsilon_i^h e^{u_i} \frac{du_i}{dt},$$

et comme l'on a

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j \varepsilon_j^i e^{u_j}$$

$(j = 1, 2, \ldots p)$, on peut écrire

$$\frac{d^2u_h}{dt^2} = \sum_i \varepsilon_i^h e^{u_i} \left(\sum_j \varepsilon_j^i e^{u_j} \right) = \sum_i \sum_j \varepsilon_i^h \varepsilon_j^i e^{u_i + u_j}.$$

En différentiant de nouveau, on aura

$$\frac{d^3u_h}{dt^3} = \sum_i \sum_j \varepsilon_i^h \varepsilon_j^i e^{u_i + u_j} \left(\frac{du_i}{dt} + \frac{du_j}{dt} \right)$$

et comme l'on a

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{du_j}{dt} = \sum_k (\varepsilon_k^i e^{u_k} + \varepsilon_k^j e^{u_k}) = \sum_k (\varepsilon_k^i + \varepsilon_k^j) \, e^{u_k}$$

$(k = 1, 2, \ldots p)$, la dernière formule s'écrit

$$\frac{d^3u_h}{dt^3} = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_i^h \varepsilon_j^i (\varepsilon_k^i + \varepsilon_k^j) \, e^{u_i + u_j + u_k}.$$

On trouve de même

$$\frac{d^4u_h}{dt^4} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \varepsilon_i^h \varepsilon_j^i (\varepsilon_k^i + \varepsilon_k^j) (\varepsilon_l^i + \varepsilon_l^j + \varepsilon_l^h) \, e^{u_i + u_j + u_k + u_h}$$

$(l = 1, 2, \ldots p)$ et d'une manière générale, en désignant pour abréger

$$\sum_i \sum_j \sum_k \cdots \sum_r \sum_s = \sum_{ijk\ldots rs},$$

on trouve que

$$\text{(9)} \qquad \frac{d^nu_h}{dt^n} = \sum_{ijk\ldots rs} B^h_{ijk\ldots rs} \, e^{u_i + u_j + u_k + \cdots + u_r + u_s}$$

où les coefficients B ont pour valeurs

$$\text{(10)} \qquad B^h_{ijk\ldots rs} = \varepsilon_i^h \varepsilon_j^i (\varepsilon_k^i + \varepsilon_k^j) \ldots (\varepsilon_s^i + \varepsilon_s^j + \varepsilon_s^h + \cdots + \varepsilon^r).$$

Chaque coeficient est une forme de degré n en éléments ε variant avec $n+1$ indices $h, i, j, k, \ldots, r, s$ dont chacun prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots p$. Ceci montre en même temps que *chaque coefficient* $B^h_{ijk\ldots rs}$ *est un nombre entier positif ou nul;* ce sont les nombres

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
B^h_i &= \varepsilon^h_i \\
B^h_{ij} &= \varepsilon^h_i\ \varepsilon^i_j \\
B^h_{ijk} &= \varepsilon^h_i\ \varepsilon^i_j\ (\varepsilon^i_k + \varepsilon^j_k) \\
B^h_{ijkl} &= \varepsilon^h_i\ \varepsilon^i_j\ (\varepsilon^i_k + \varepsilon^j_k)\ (\varepsilon^i_l + \varepsilon^j_l + \varepsilon^k_l) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Le second membre de chaque équation du système (3) étant fonction entière de toutes les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$, sera fonction holomorphe de t au voisinage de $t=0$ pour tout système d'intégrales u_k ayant pour $t=0$ des valeurs finies et déterminées. Chacune de telles intégrales u sera donc au voisinage de $t=0$ développable en série

$$
(12)\qquad u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots
$$

ayant pour coefficient général

$$
a_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right)_0 .
$$

En vertu de (9) on peut l'écrire

$$
(13)\qquad a_n = \frac{1}{n!}\sum_{ijk\ldots rs} B_{ijk\ldots rs}\, e^{\delta_i+\delta_j+\delta_k+\cdots+\delta_r+\delta_s}
$$

où δ_h désigne la valeur de la fonction u_h pour $t=0$.

Dans l'expression

$$
(14)\qquad e^{\delta_i+\delta_j+\cdots+\delta_r+\delta_s}
$$

l'exposant est une combinaison à répétition, de n-ième classe (puisqu'il y a en tout n indices $i, j, k \ldots r, s$) à p éléments $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$; chaque combinaison fournit un tel exposant.

Si

$$(15) \qquad \begin{aligned} u_1 &= f_1(t, C_1, \ldots C_p) \\ u_2 &= f_2(t, C_1, \ldots C_p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_p &= f_p(t, C_1, \ldots C_p) \end{aligned}$$

sont les intégrales générales du système canonique, on aura

$$(16) \qquad \begin{aligned} \delta_1 &= u_1(0, C_1, \ldots C_p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_p &= u_p(0, C_1, \ldots C_p) \end{aligned}$$

et comme, les combinaisons étant à répétition, plusieurs δ sont égaux entre eux l'expression (14) se présentera sous la forme

$$(17) \qquad c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_p^{\alpha_p}$$

où

$$(18) \qquad c_1 = e^{\delta_1}, \quad c_2 = e^{\delta_2}, \ldots, c_p = e^{\delta_p}$$

et où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sont des nombres entiers positifs liés par la relation

$$(19) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n.$$

On peut donc écrire

$$(20) \qquad a_n = \frac{1}{n!} \sum_{ijk \ldots rs} B_{ijk \ldots rs} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_1} \ldots c_p^{\alpha_p}$$

où la somme d'entiers α est égale au rang du coeficient, les c étant les constantes d'intégration du système canonique. Comme on le voit, *le produit $n!\, a_n$ est une forme de degré n en constantes c, dont les coefficients sont les nombres entiers positifs ou nuls $B_{ijk \ldots rs}$.*

Pour déterminer le rayon de convergence de la série (12), remarquons que si dans les expressions (11) des nombres B on remplace chaque ε^i_k par l'unité, les nombres ainsi obtenus représenteront des limites supérieures pour les $B_{ij\ldots rs}$; ces limites seraient

$$B^h_i = 1 = 0! \qquad B^h_{ij} = 1 = 1!$$

$$B^h_{ijk} = 1 . 2 = 2! \qquad B^h_{ijkl} = 1 . 2 . 3 = 3!$$

et d'une manière générale

$$B^h_{ij\ldots rs} = (n-1)!$$

D'autre part, la somme

$$\delta_i + \delta_j + \cdots + \delta_r + \delta_s$$

contient n termes dont chacun prend p valeurs $\delta_1, \ldots, \delta_p$. Si donc l'on désigne par δ la plus grande partie réelle de valeurs $\delta_1, \ldots, \delta_p$ on aura

$$\sum_{ij\ldots rs} \left| e^{\delta_i + \delta_j + \cdots + \delta_r + \delta_s} \right| < p^n e^{n\delta}$$

ce qui, d'apres la formule (13) et les limites supérieures trouvées pour les nombres $B_{ij\ldots rs}$ fournit l'inégalité

$$(21) \qquad |a_n| \leqslant \frac{(pe^\delta)^n}{n} .$$

Ceci montre que *la série* (6) *convergera surement dans le cercle de rayon*

$$(22) \qquad R = \frac{1}{pe^\delta} .$$

Ce cercle est le même pour toutes les fonctions u d'un système canonique. Il ne dépend que de l'ordre p du système et de la plus grande partie réelle δ des valeurs initiales des fonctions u engendreés par le système.

Il est à remarquer que le système canonique (3) par le changement

$$e^{u_k} = v_k$$

se transforme en système *algébrique* dans lequel chaque dérivée $\frac{dv_k}{dt}$ se trouve exprimée sous la forme de forme quadratique en variables

$$v_1, v_2, \ldots v_p$$

dont les coefficients ont pour valeurs 0 ou 1.

Mais le système (3), quoique transcendant, présente l'avantage de permettre le développement des fonctions inconnues en séries tayloriennes à structure des coefficients connue, dont on connaîtra le rayon de convergence.

Chapitre II

Intégration des équations différentielles algébriques au moyen des fonctions de la suite canonique.

III. Réduction des équations différentielles algébriques au système canonique et leur intégration au moyen de la suite canonique.

Considérons l'équation différentielle algébrique d'ordre p

$$(23) \qquad f(x, y, y' \ldots y^{(p)}) = 0,$$

où l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que f soit polynome en

$$x, y, y', \ldots, y^{(p)}.$$

De (23) on tire par différentiation

$$y^{(p+1)} = \frac{P}{Q},$$

où

$$P = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \cdots - \frac{\partial f}{\partial y^{(p-1)}} y^{(p)},$$

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}.$$

Si alors on pose

$$y = y_1, \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \ldots \quad y^{(p)} = \frac{dy^{(p-1)}}{dx} = \frac{dy_p}{dx} = y_{p+1}$$

et si l'on introduit une nouvelle variable indépendante t, liée à x par la relation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Q,$$

on obtient

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y_2 Q,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y_3 Q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \frac{dy_p}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y_{p+1} Q,$$

$$\frac{dy_{p+1}}{dt} = \frac{dy_{p+1}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy^{(p)}}{dx} Q = y^{(p+1)} Q = P,$$

de sorte qu'en posant

$$x = y_{p+2},$$

l'équation (23) est équivalente au système

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 Q\,, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3 Q, \;\ldots\;, \frac{dy_p}{dt} = y_{p+1}\, Q\,,$$

$$\frac{dy_{p+1}}{dt} = P\,, \qquad \frac{dy_{p+2}}{dt} = Q\,.$$

L'équation (23) est donc ramenée au système d'équations simultanées du premier ordre

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = S_1(y_1, y_2, \ldots y_{p+2})\,,\\
&\frac{dy_2}{dt} = S_2(y_1, y_2, \ldots y_{p+2})\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_{p+2}}{dt} = S_{p+2}(y_1, y_2, \ldots y_{p+2})\,,
\end{aligned}
$$

où les S_k sont polynomes en

$$(25)\qquad y_1,\; y_2, \ldots y_{p+2}$$

ne contenant pas explicitement la variable indépendante t.

Dans le cas où l'équation (23) est celle du premier ordre

$$(26)\qquad f(x, y, y') = 0$$

le système (24) est

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 Q\,, \quad \frac{dy_2}{dt} = P, \quad \frac{dy_3}{dt} = Q,$$

où

$$P = \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\, y', \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y'}\,.$$

Revenons au système (24). Chacun des polynomes S_k est la somme d'un nombre limité de termes dont chacun est le produit d'une constante par diverses puissances des fonctions (25), de sorte que le système (24) est de la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= S_1^1 + S_2^1 + S_3^1 + \cdots \\
\frac{dy_2}{dt} &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_{p+2}}{dt} &= S_1^{p+2} + S_2^{p+2} + S_3^{p+2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{27}
$$

où les termes S_i^k sont de la forme

$$
S_i^k = A_i^k \, y_1^{\alpha_{1,i}^k} \, y_2^{\alpha_{2,i}^k} \cdots y_{p+2}^{\alpha_{p+2,i}^k}
\tag{28}
$$

les A_i^k étant des constantes non nulles et les α_{ji}^k des nombres entiers positifs ou nuls.

Introduisons, à la place des y_k, les nouvelles fonctions inconnues en nombre limité

$$
\begin{matrix}
z_1^1 & z_2^1 & z_3^1 & \cdots \\
z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
z_1^{p+2} & z_2^{p+2} & z_3^{p+2} & \cdots
\end{matrix}
\tag{29}
$$

telles que

$$
S_i^k = y_k \, e^{z_i^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p+2).
\tag{30}
$$

Chaque terme des seconds membres des équations (27) introduira ainsi une nouvelle fonction z_i^k, et le nombre r de ces fonctions sera égal au nombre total de ces termes dans l'ensemble des équations du système (27).

Chaque fonction z_i^k est parfaitement déterminée par l'ensemble de fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{p+2}$. Inversement, ce dernier ensemble est parfaitement déterminé par le Tableau (29) des fonctions z_i^k ainsi introduites En effet, les équations (27), en vertu des équations (30), s'écrivent

$$\frac{dy_k}{dt} = y_k\, e^{z_1^k} + y_k\, e^{z_2^k} + y_k\, e^{z_3^k} + \cdots$$

$$(k=1, 2, \ldots p+2)$$

d'où

$$\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{dt} = e^{z_1^k} + e^{z_2^k} + e^{z_3^k} + \cdots \tag{31}$$

et en intégrant on obtiendra $\log y_k$ comme somme d'un nombre limité d'expressions

$$\int e^{z_\beta^\alpha}\, dt. \tag{32}$$

Les quadratures introduisent pour chaque fonction y_k une constante d'intégration; celles-ci se déterminent au moyen des valeurs initiales y_0, y_0', $\ldots$ $y_0^{(p)}$ que doivent prendre l'intégrale y et ses p dérivées premières pour la valeur initiale $x=x_0$. En supposant toutes ces valeurs initiales différentes de zéro, la formule (30), écrite sous la forme

$$\log A_i^k + \alpha_{1i}^k \log y_1 + \cdots + \alpha_{p+2,\, i}^k \log y_{p+2} = \tag{33}$$

$$= \log y_k + z_i^k$$

fournira pour la fonction z_i^k la valeur initiale ζ_i^k qu'elle prendra pour $x=x_0$, à savoir

$$\zeta_i^k = \log A_i^k + \alpha_{1i}^k \log y_0 + \alpha_{2i}^k\, y_0' + \cdots \tag{34}$$

$$+ (\alpha_{ki} - 1)\log y^{(k-1)} + \cdots + \alpha_{p+2,\, i}^k \log x_0\,.$$

Les fonctions z_i^k du Tableau (28) détermineront donc sans ambiguité les fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_{p+2}$ en fonction du paramètre t. Or, *les fonctions z_i^k s'expriment linéairement au moyen de termes u de la suite canonique.*

Pour le faire voir, différentions l'équation (32), ce qui donne

$$(35)\quad \frac{dz_i^k}{dt} = \frac{\alpha_{1i}^k}{y_1}\frac{dy_1}{dt} + \cdots + \frac{\alpha_{ki}-1}{y_k}\frac{dy_k}{dt} + \cdots + \frac{\alpha_{p+2,\,i}^k}{y_{p+2}}\frac{dy_{p+2}}{dt}$$

En y remplaçant les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{y_h}\frac{dy_h}{dt} \qquad (h=1, 2, \ldots p+2)$$

par leurs expressions (31), on obtient un système d'équations dont chacune exprime une dérivée $\dfrac{dz_i^k}{dt}$ comme forme linéaire (à coefficients nombres entiers, positifs, nuls ou égaux à -1) d'un groupe d'expressions $e^{z_h^j}$. Le coefficient multipliant $e^{z_h^j}$ dans l'expression de $\dfrac{dz_i^k}{dt}$ sera désigné par λ_{hk}^j.

Substituons dans l'expression du second membre de chaque $\dfrac{dz_i^k}{dt}$ chaque fonction z_h^j par

$$z_h^j = u_{hk}^j + \log \lambda_{hk}^j$$

lorsque λ_{hk}^j diffère de zéro, et par

$$z_k^j = u_{hk}^j$$

lorsque $\lambda_{hk}^j=0$, de sorte qu'il y ait dans chaque $\dfrac{dz_i^k}{dt}$ autant des fonctions u_{hk}^j qu'il y a de termes dans la forme linéaire qui exprime cette dérivée, y compris les termes à coefficients λ_{hk}^j nuls.

L'équation (35) se transformera en une équation qui exprimera la dérivée de la fonction u^k_{hi} sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$\varepsilon^k_{hi}\; e^{u^k_{hi}}$$

où chaque coefficient ε^k_{hi} est égal à 0 ou à 1.

Le système d'équations simultanées, auxquelles satisferont les fonctions u^k_{hi}, aura donc la forme d'un système canonique, de sorte que *chaque fonction* u^k_{hi} *coïncidera avec un terme de la suite canonique.*

Les constantes d'intégration pour les intégrales du système canonique, c'est-à-dire les valeurs η^k_{hi} que prendront les fonctions u^k_{hi} pour $x=x_0$ seront fournies par les équations

$$\eta^k_{hi} = \zeta^k_i + \log \lambda^k_{hi} \tag{37}$$

où les ζ^k_i sont exprimés par la formule (34).

En remplaçant dans la formule (32) les z par les u, on obtient $\log y_k$ comme forme linéaire en diverses expressions

$$\int e^{u^{\gamma}_{\alpha\beta}}\, dt$$

à coefficients nombres entiers.

Et en se rappellant que

$$y_1 = y\,, \qquad y_{p+2} = x\,,$$

le théorème général suivant se trouve démontré:

Toute équation différentielle algébrique s'intègre sous la forme

$$x = e^{\Phi_1(t)}\,, \qquad y = e^{\Phi_2(t)}\,, \tag{38}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions linéaires (à coefficients nombres entiers) en un nombre limité d'expressions

$$\int e^{u_k}\, dt\,, \tag{39}$$

les u_k étant les termes de la suite canonique.

Il est à remarquer que les constantes A_i^k, figurant comme coefficients des puissances des variables $x, y, y', \ldots, y^{(p)}$ dans l'équation différentielle considérée, n'entrent dans l'expression de son intégrale que dans les expressions de ses constantes d'intégration, c'est-à-dire dans celles du système canonique.

IV. Exemples d'intégration à l'aide de la suite canonique

Les exemples qui suivent éclaircirons le mode de réduction des équations différentielles algébriques aux systèmes canoniques et leur intégration au moyen de la suite canonique.

Premier exemple: considérons l'équation du premier ordre

$$y'^2 + y^2 - ax^m = 0\ .$$

On trouve

$$P = amx^{m-1} - 2yy' = amy_3^{m-1} - 2y_1 y_2$$

$$Q = 2y' = 2y_2$$

et par suite le système (26) est

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_2{}^2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = amy_3^{m-1} - 2y_1\, y_2$$

$$\frac{dy_3}{dt} = 2y_2{}^2.$$

Les équations (30) sont donc

$$2y_2^2 = y_1 e^{z_1^1} \qquad amy_3^{m-1} = y_2 e^{z_1^2}$$

$$-2y_1 y'_2 = y_2 e^{z_2^2} \qquad 2y_2 = y_3 e^{z_1^3}$$

et les equations fournissant les $\log y_k$ deviennent

$$\log y_1 = \int e^{z_1^1} dt$$

$$\log y_2 = \int e^{z_1^2} dt + \int e^{z_2^2} dt$$

$$\log y_2 = \int e^{z_3^3} dt.$$

Le système (35) est

$$\frac{dz_1^1}{dt} = -e^{z_1^1} + 2e^{z_1^2} + 2e^{z_2^2} + 0\,.\,e^{z_1^3}$$

$$\frac{dz_1^2}{dt} = 0\,.\,e^{z_1^1} - e^{z_1^2} - e^{z_2^2} + (m-1)\,e^{z_1^3}$$

$$\frac{dz_2^2}{dt} = e^{z_1^1} + 0\,.\,e^{z_1^2} + 0\,.\,e^{z_2^2} + 0\,.\,e^{z_1^3}$$

$$\frac{dz_1^3}{dt} = 0\,.\,e^{z_1^1} + e^{z_1^2} + e^{z_2^2} - e^{z_1^3}$$

ce qui fournit le Tableau suivant des coefficients λ_{hk}^j

$\lambda_{11}^1 = -1$	$\lambda_{11}^2 = 2$	$\lambda_{21}^2 = 2$	$\lambda_{11}^3 = 0$
$\lambda_{12}^1 = 0$	$\lambda_{12}^2 = -1$	$\lambda_{22}^2 = -1$	$\lambda_{12}^3 = m-1$
$\lambda_{13}^1 = 1$	$\lambda_{13}^2 = 0$	$\lambda_{23}^2 = 0$	$\lambda_{13}^3 = 0$
$\lambda_{14}^1 = 0$	$\lambda_{14}^2 = 1$	$\lambda_{24}^2 = 1$	$\lambda_{14}^3 = -1$

et le Tableau de fonctions u^j_{hk}

$$\left\{\begin{array}{ll} u^1_{11} = z^1_1 + \log(-1) & u^2_{11} = z^2_1 + \log 2 \\ u^2_{21} = z^2_2 + \log 2 & u^3_{11} = z^3_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u^1_{12} = z^1_1 & u^2_{12} = z^2_1 + \log(-1) \\ u^2_{22} = z^2_2 + \log(-1) & u^3_{12} = z^3_1 + \log(m-1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u^1_{13} = z^1_1 & u^2_{13} = z^2_1 \\ u^2_{23} = z^2_2 & u^3_{13} = z^3_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u^1_{14} = z^1_1 & u^2_{14} = z^2_1 \\ u^2_{24} = z^2_2 & u^3_{14} = z^3_1 + \log(-1). \end{array}\right.$$

Le système canonique auquel se ramène l'équation différentielle est donc (les termes dans le second membre ayant pour coefficients λ_{ij} la valeur zéro n'étant pas écrite)

$$\frac{du^1_{11}}{dt} = \frac{du^1_{12}}{dt} = \frac{du^1_{13}}{dt} = \frac{du^1_{14}}{dt} = e^{u^1_{11}} + e^{u^2_{11}} + e^{u^2_{21}}$$

$$\frac{du^2_{11}}{dt} = \frac{du^2_{12}}{dt} = \frac{du^2_{13}}{dt} = \frac{du^2_{14}}{dt} = e^{u^2_{12}} + e^{u^2_{22}} + e^{u^3_{12}}$$

$$\frac{du^2_{21}}{dt} = \frac{du^2_{22}}{dt} = \frac{du^2_{23}}{dt} = \frac{du^2_{24}}{dt} = e^{u^1_{13}}$$

$$\frac{du^3_{11}}{dt} = \frac{du^3_{12}}{dt} = \frac{du^3_{13}}{dt} = \frac{du^3_{14}}{dt} = e^{u^2_{14}} + e^{u^2_{24}} + e^{u^3_{14}}.$$

Les formules exprimant les logarithmes de y_1, y_2, y_3 sont

$$\log y_1 = \log y = \int e^{u_{13}} dt$$

$$\log y_2 = \log y' = \int e^{\overset{2}{u}_{13}} dt + \int e^{\overset{2}{u}_{23}} dt$$

$$\log y_3 = \log x = \int e^{\overset{3}{u}_{13}} dt$$

et il ne resterait que de retrouver dans la suite canonique les termes

$$\overset{1}{u}_{13}, \quad \overset{2}{u}_{13}, \quad \overset{2}{u}_{23}, \quad \overset{3}{u}_{13}$$

figurant dans ces expressions, ce qui se fera par l'inspection du Tableau des ε_i^k des équations du système canonique (3) et le mode de numération de la suite canonique.

Deuxième exemple: Considérons l'équation linéaire du second ordre

$$y'' - x^m y = 0 .$$

On trouve

$$P = mx^{m-1} y + x^m y = my_4^{m-1} y_1 + y_4^m y_1$$

$$Q = 1$$

et par suite le système (26) est

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = my_4^{m-1} y_1 \qquad \frac{dy_4}{dt} = 1 .$$

Les équations (30) sont

$$y_2 = y_1 e^{z_1^1} \qquad\qquad y_3 = y_2 e^{z_1^2}$$

$$m y_4^{m-1} y_1 = y_3 e^{z_1^3} \qquad\qquad 1 = y_4 e^{z_1^4}$$

et les équations exprimant les $\log y_k$ sont

$$\log y_1 = \int e^{z_1^1} dt \qquad\qquad \log y_2 = \int e^{z_1^2} dt$$

$$\log y_3 = \int e^{z_1^3} dt \qquad\qquad \log y_4 = \int e^{z_1^4} dt.$$

Le système (34) est

$$\frac{dz_1^1}{dt} = - e^{z_1^1} + e^{z_1^2} + 0 \,.\, e^{z_1^3} + 0 \,.\, e^{z_1^4}$$

$$\frac{dz_1^2}{dt} = 0 \,.\, e^{z_1^1} - e^{z_1^2} + e^{z_1^3} + 0 \,.\, e^{z_1^4}$$

$$\frac{dz_1^3}{dt} = e^{z_1^2} - e^{z_1^2} + 0 \,.\, e^{z_1^3} + (m-1)\, e^{z_1^4}$$

$$\frac{dz_1^4}{dt} = 0 \,.\, e^{z_1^1} + 0 \,.\, e^{z_1^2} + 0 \,.\, e^{z_1^3} - e^{z_1^4}$$

ce qui fournit le Tableau des coefficients λ_{hk}^j

$\lambda_{11}^1 = -1$	$\lambda_{11}^2 = 1$	$\lambda_{11}^3 = 0$	$\lambda_{11}^4 = 0$
$\lambda_{12}^1 = 0$	$\lambda_{12}^2 = -1$	$\lambda_{12}^3 = 1$	$\lambda_{12}^4 = 0$
$\lambda_{13}^1 = 1$	$\lambda_{13}^2 = -1$	$\lambda_{13}^3 = 0$	$\lambda_{13}^4 = m-1$
$\lambda_{14}^1 = 0$	$\lambda_{14}^2 = 0$	$\lambda_{14}^3 = 0$	$\lambda_{14}^4 = -1$

et le Tableau de fonctions u_{hk}^j

$$\begin{cases} u_{11}^1 = z_{11}^1 + \log(-1) & u_{11}^2 = z_1^2 \\ u_{11}^3 = z_1^3 & u_{11}^4 = z_1^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{12}^1 = z_1^1 & u_{12}^2 = z_1^2 + \log(-1) \\ u_{12}^3 = z_1^3 & u_{12}^4 = z_1^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{13}^1 = z_1^1 & u_{13}^2 = z_1^2 + \log(-1) \\ u_{13}^3 = z_1^3 & u_{14}^4 = z_1^4 + \log(m-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{14}^1 = z_1^1 & u_{14}^2 = z_1^2 \\ u_{14}^3 = z_1^3 & u_{14}^4 = z_1^4 + \log(-1). \end{cases}$$

Le système canonique auquel se ramène l'équation différentielle est donc (les termes à coefficient λ_{ij} égaux à zéro n'étant pas écrits)

$$\frac{du_{11}^1}{dt} = \frac{du_{12}^1}{dt} = \frac{du_{13}^1}{dt} = \frac{du_{14}^1}{dt} = e^{u_{11}^1} + e^{u_{11}^2}$$

$$\frac{du_{11}^2}{dt} = \frac{du_{12}^2}{dt} = \frac{du_{13}^2}{dt} = \frac{du_{14}^2}{dt} = e^{u_{12}^1} + e^{u_{12}^3}$$

$$\frac{du_{11}^3}{dt} = \frac{du_{12}^3}{dt} = \frac{du_{13}^3}{dt} = \frac{du_{14}^3}{dt} = e^{u_{13}^1} + e^{u_{13}^2} + e^{u_{13}^4}$$

$$\frac{du_{11}^4}{dt} = \frac{du_{12}^4}{dt} = \frac{du_{13}^4}{dt} = \frac{du_{14}^4}{dt} = e^{u_{14}^4}.$$

Les formules exprimant les logarithmes de y_1, y_2, y_3, y_4 sont

$$\log y_1 = \int e^{u_{12}^1}\,dt \qquad \log y_2 = \int e^{u_{11}^2}\,dt$$

$$\log y_3 = \int e^{u_{11}^3}\,dt \qquad \log y_4 = \int e^{u_{11}^4}\,dt\,.$$

V. Cas où l'intégration au moyen de la suite canonique s'effectue sans quadratures.

Dans ce paragraphe nous allons montrer que, un cas exceptionnel exactement connu étant mis à part, *l'intégration de l'équation différentielle à l'aide de la suite canonique s'effectue sans quadratures.*

La suite d'équations (32) forme un système d'équations linéaires en $p+2$ inconnues

$$\log y_1,\ \log y_2, \dots \log y_{p+2}\,. \tag{40}$$

Les équations sont de la forme

$$\log A_i^k + \alpha_{1i}^k \log y_1 + \cdots + (\alpha_{ki}-1)\log y_k + \\ + \cdots + \alpha_{p+2,\,i}^k \log y_{p+2} = z_i^k \tag{41}$$

et leur nombre r est égal à celui des z_i^k, c'est-à-dire au nombre total des termes S_i^k dans l'ensemble des équations du système (26). Ce nombre est au moins égal à $p+2$ et le surpasse généralement.

Les équations (41) ne sont jamais incompatibles, car l'introduction des z_i^k n'est en somme qu'un mode de désignation de chaque terme S_i^k par une fonction particulière, cette désignation n'introduisant aucune sorte d'incompatibilité. Il s'en suit, d'après le théorème de Rouché sur les équations linéaires que les déterminants caracteristiques du système sont tous nuls, et les équations qui l'experiment établissent $r-q$ relations entre les z_i^k, q étant l'ordre du déterminant principal du système. Ce nombre q est au plus égal au plus petit des deux nombres r et $p+2$, et comme $p+2 \leqslant r$, on a $q \leqslant p+2$. D'après le théorème de Rouché lorsque $q = p+2$, le système (41) admet un système de solutions en inconnues (40), parfaitement déterminé et unique.

Envisageons le cas *où l'ordre du déterminant principal est égal à* $p+2$. Les solutions du système (41) seront de la forme

$$
(42) \quad
\begin{aligned}
\log y_1 &= H_1 + g_1^1 z_1 + g_2^1 z_2 + \cdots + g_{p+2}^1 z_{p+2} \\
\log y_2 &= H_2 + g_1^2 z_1 + g_2^2 z_2 + \cdots + g_{p+2}^2 z_{p+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\log y_k &= H_{p+2} + g_1^{p+2} z_1 + g_2^{p+2} z_2 + \cdots + g_{p+2}^{p+2} z_{p+2}
\end{aligned}
$$

où les H et les g sont des constantes, les g étant des nombres commensurables à dénominateurs lesquels, réduits à leur plus simple expression, ne surpassent pas la valeur du déterminant principal du système (41) (qui est un nombre entier). Les fonctions z entrant dans les seconds membres des équations (42) sont généralement en nombre plus petit que r, car dans ces formules n'entrent pas tous les z_i^k du Tableau (29); les z_i^k restants se trouveront éliminés en vertu des relations exprimés par les déterminants caractéristiques égaux à zéro. Il en sera de même des formules exprimant les $\log y_k$ en fonctions des u_{hk}^j. Elles sont de la même forme que les formules (42); en vertu des relations

$$z_h^j = u_{hk}^j + \log \lambda_{hk}^j$$

les coefficients g restent les mêmes, tandis que les constantes H changent.

Comme on le voit, dans le cas ici considéré

Le logarithme de la variable indépendante x et ceux des fonctions inconnues $y_1, y_2 \ldots y_{p+2}$ s'expriment linéairement en fonction d'un nombre limité de termes de la suite canonique.

Considérons, à titre d'exemple, l'équation traitée dans ce qui précède

$$y'^2 + y^2 - ax^m = 0 .$$

On trouve, d'après les formules trouvées précédemment pour cette équation, que le système d'équations linéaires en logarithmes de y_1, y_2, y_3 (après y avoir remplacé les z par leurs expressions en u) est

$$-\log y_1 + 2\log y_2 = u^1_{13} - \log 2$$

$$-\log y_2 + (m-1)\log y_3 = u^2_{13} - \log (am)$$

$$\log y_1 = u^2_{23} - \log(-2)$$

$$\log y_2 - \log y_3 = u^3_{13} - \log 2$$

d'où l'on tire

$$\log y_1 = u^2_{23} - \log(-2)$$

$$\log y_2 = u^1_{13} + u^2_{23} - \log(-4)$$

$$\log y_3 = u^1_{13} + u^2_{23} - u^3_{13} - \log(-2)$$

et finalement

$$y_1 = y = -\frac{e^{u^2_{23}}}{2}$$

$$y_2 = y' = -\frac{e^{u^1_{13} + u^2_{23}}}{4}$$

$$y_3 = x = -\frac{e^{u^1_{13} + u^2_{23} - u^3_{13}}}{2}.$$

VI. Développement, dans le cas général, de la variable indépendante et de l'intégrale de l'équation différentielle algébrique en séries procédant suivant les puissances d'un paramètre

Le théorème exprimé sous la forme des équations (12) resp. (20) fournit la possibilité de développer x et y en séries tayloriennes ordonnées suivant les puissances d'un paramètre t et d'en connaître la structure des coefficients ainsi que le rayon de convergence.

A cet effet nous rappellerons que toute fonction u_h, terme de la suite canonique, est développable en série

$$(43) \qquad u_h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \, t^n$$

avec

$$(44) \qquad a_n^h = \frac{A_n^h}{n!}$$

où A_n^h est une forme de degré n en certaines constantes

$$(45) \qquad c_1, \ c_2, \ c_3, \ldots$$

(arbitraires ou fixes suivant qu'il s'agit des intégrales générales u du système canonique ou bien des intégrales particulières), les coefficients de la forme étant des *nombres entiers* dont nous avons indiqué la loi de formation.

En le portant dans les équations exprimant les $\log y_k$ comme fonctions linéaires des $u(t)$, on trouve pour chacune des fonctions y_k un développement de la forme

$$(46) \qquad \log y_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^k \, t^n$$

où les coefficients b_n^k pour $n = 1, 2, 3 \ldots$ sont de la forme

$$(47) \qquad b_n^k = \frac{D_n^k}{n!},$$

chaque D_n^k étant une forme de degré n en un certain nombre limité de constantes (45), les coefficients (h) de la forme étant des nombres commensurables.

Or, connaissant le développement de

$$v = \log y = \sum \beta_n \, t^n,$$

on connaîtra celui de

$$y = e^{v} = \sum \gamma_n t^n \tag{48}$$

de la manière bien connue suivante :

De (48) on tire

$$yv' = y'$$

c'est-à-dire

$$(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots)(\beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2 + \cdots) =$$
$$= \gamma_1 + 2\gamma_2 t + 3\gamma_3 t^2 + \cdots$$

d'où, en égalant les coefficients de t^{n-1} (pour $n > 1$) dans les deux membres de l'équation, on trouve la formule de récurrence

$$n\gamma_n = \beta_1 \gamma_{n-1} + 2\beta_2 \gamma_{n-2} + 3\beta_3 \gamma_{n-3} + \cdots + n\beta_n \gamma_0$$

avec

$$\gamma_0 = e^{v(0)} = e^{\beta_0},$$
$$\gamma_1 = e^{\beta_0} \beta_1,$$

d'où l'on tire de proche en proche

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{e^{\beta_0}}{2!}(\beta_1^2 + 2\beta_2) \\ \gamma_3 &= \frac{e^{\beta_0}}{3!}(\beta_1^3 + 6\beta_1 \beta_2 + 6\beta_3) \\ \gamma_4 &= \frac{e^{\beta_0}}{4!}(\beta_1^4 + 12\beta_1^2 \beta_2 + 24\beta_1 \beta_3 + 12\beta_2^2 + 24\beta_4) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{49}$$

formules lesquelles, connaissant les coefficients

$$\beta_n = b_n^k$$

de la fonction

$$v = \log y_k$$

permettra de calculer ceux de la fonction y_k elle-même. Et en le faisant de proche en proche, on trouve que

$$n!\, \gamma_n = e^{\beta_0} P_n (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n) \tag{50}$$

où P_n est polynome de degré n en

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n,$$

ses coefficients étant des nombres entiers. Il s'en suit que

Le produit $e^{-\beta_0} \gamma_n$ est polynome de degré n en coefficients

$$b_1^k, b_2^k, \dots b_n^k$$

fournis par la formule (47), *à coefficients nombres commensurables.*

Comme les facteurs premiers $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ dans les dénominateurs de ces coefficients ne proviennent que de ceux des dénominateurs des nombres commensurables (h) (qui sont en nombre limité et n'augmentent pas avec n) et de ceux provenant de la factorielle $n!$, les facteurs premiers du produit $e^{\beta_0}\gamma_n$ n'augmentent pas indéfiniment lorsque n croît au delà de toute limite.

La fonction

$$y(t) = e^{v(t)}$$

reste holomorphe dans le cercle d'holomorphie de $v(t)$. Il s'en suit que *les séries tayloriennes exprimant les fonctions $y_1 \dots y_{p+2}$ en fonction du paramètre t, formées dans ce qui précède, convergeront toutes dans le même cercle dans lequel convergent les séries exprimant les fonctions u_h, c'est-à-dire dans le cercle de rayon*

$$R = \frac{1}{pe^{\delta}} \tag{51}$$

trouvé dans le Chapitre I.

Et par conséquent:

La variable indépendante x et l'intégrale y de toute équation différentielle algébrique d'ordre p, dont l'ordre du déterminant principal est égal à $p+2$ s'expriment comme fonctions du paramètre t par des séries de la forme précédente convergentes dans le cercle de rayon R fourni par la formule (51).

Les coefficients de ces séries exprimant x et y jouiront également de la propriété arithmétique trouvée tout-à-l'heure pour les coefficients tayloriens des fonctions $y_1, \dots y_{p+2}$, à savoir :

Il existe un nombre fixe dont le produit par le coefficient général de la série exprimant x, ainsi que de la série exprimant y, sera un nombre commensurable, dont les dénominateurs, réduits à leur plus simple expression, ne présenteront jamais de facteurs premiers augmentant indéfiniment avec le rang du coefficient.

Nous rappellerons que, l'équation différentielle étant écrite sous la forme

$$(52) \qquad f(x, y, y' \dots y^{(p)}) = 0$$

où f est polynome en

$$(53) \qquad y, y', \dots, y^{(p)}$$

à coefficients rationnels en x, le paramètre t est défini par la formule

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}.$$

Pour que t soit une fonction donnée $\theta(x)$ de x, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = \frac{1}{\theta'(x)},$$

c'est-à-dire que l'équation (52) soit de la forme

$$\psi(x)\, y^{(p)} = F(x, y, y', \dots y^{(p-1)})$$

où la fonction $\psi(x)$ coïncide avec $\dfrac{1}{\theta'(x)}$, F étant polynome en $x, y, y', \dots y^{(p-1)}$. Dans ce cas l'intégrale y est développable en série procédant suivant les puissances de la fonction $\theta(x)$; ce qui précède fournit la possibilité de calculer les coefficients de cette série et de lui assigner sa région de convergence dans le plan des x.

Lorsque l'équation (52) est de la forme

$$y^{(p)} = F(x, y, y', \dots y^{(p-1)})$$

le paramètre t coïncidera avec x et ce qui précède conduit alors au développement de l'intégrale y suivant les puissances de x, dont on connaîtra le rayon de convergence (51).

Chapitre III.

Intégration des systèmes d'équations simultanées algébriques d'un ordre quelconque au moyen des fonctions de la suite canonique.

Tout système d'équations différentielles simultannées algébriques, quel que soit son ordre, se ramène de la manière connue, par le changement convenable de variables et par l'augmentation nécéssaire du nombre de fonctions inconnues, au système de la forme

$$(54) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= R_1(x, y_1 \dots y_m;\ z) \\ \frac{dy_2}{dx} &= R_2(x, y_1, \dots y_m;\ z) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_m}{dx} &= R_m(x, y_1, \dots y_m;\ z) \end{aligned}$$

où $R_1, R_2, R_3 \dots$ sont des fonctions *rationnelles* des variables

$$x, y_1, \dots y_m; \; z \tag{55}$$

où z désigne une irrationnelle définie par une équation algébrique

$$\lambda(x, y_1, \dots y_m; z) = 0 \tag{56}$$

où λ est un polynome en variables (55).

Si l'on désigne par P_k et Q_k le numérateur et le dénominateur de la fonction R_k le système (54) s'écrit

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{dy_m}{dt} = \frac{P_m}{Q_m} \tag{56*}$$

où les P_k et Q_k sont polynomes en variables (55).

Il est toujours possible, par une transformation, de faire disparaître les dénominateurs dans les seconds membres des équations (56*). A cet effet formons le polynome

$$Q = Q_1 Q_2 \dots Q_m;$$

le système (56*) s'écrit

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{T_1}{Q}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{T_2}{Q}, \dots, \frac{dy_m}{dx} = \frac{T_m}{Q} \tag{57}$$

où T_k est le polynome en variables (55) égal au produit du polynome P_k par tous les polynomes Q_1, $Q_2, \dots, Q_m$ sauf Q_k.

On peut maintenant faire disparaître le dénominateur commun Q dans les seconds membres des équations (57). On le fera de la manière suivante:

De l'équation (56) on tire par différentiation

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda}{\partial z} dz + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \lambda}{\partial y_k} dy_k = 0$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y_k}\dfrac{dy_k}{dt}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}} \tag{58}$$

où t est une nouvelle variable indépendante, introduite à la place de x. Si l'on prend cette nouvelle variable telle que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial z} Q, \tag{59}$$

on aura

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{dy_k}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy_k}{dx} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial z} Q$$

ce qui, d'après les équations (57), s'écrit sous la forme

$$\frac{dy_k}{dt} = T_k \frac{\partial\lambda}{\partial z} . \tag{60}$$

En le remplaçant dans l'équation (58) écrite sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x} Q - \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial\lambda}{\partial y_k}\dfrac{dy_k}{dt}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}} ,$$

elle devient

$$\frac{dz}{dt} = -\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} Q + \sum_{k=1}^{m} T_k \frac{\partial\lambda}{\partial y_k}\right) . \tag{61}$$

Les seconds membres des équations (59), (60) et (61) sont polynomes en variables (55). Si donc on introduit x et z comme deux nouvelles fonctions inconnues

$$x = y_{m+1}, \quad z = y_{m+2} ,$$

le système (54) se trouve ramené au système de la forme

$$(62) \qquad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= S_1(y_1, y_2, \ldots y_{m+2}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_{m+2}}{dt} &= S_{m+2}(y_1, y_2 \ldots y_{m+2}) \end{aligned}$$

où les S_k sont polynomes en fonctions inconnues

$$y_1, y_2, \ldots y_{m+2}$$

ne contenant pas explicitement la variable indépendante t.

Dans le cas où les équations du système (54) ne contiennent pas l'irrationnelle z, de sorte qu'elles expriment les dérivées des fonctions y_k comme fonctions rationnelles des variables

$$x, y_1, y_2 \ldots y_m$$

la réduction du système (54) au système (62) s'effectuerait simplement par l'introduction de la nouvelle variable indépendante t définie par la relation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Q.$$

Dans ce cas le système (62) se composerait de $m+1$ équations; la $(m+1)$-ième fonction inconnue serait la variable $x = y_{m+1}$.

Le système (62) est de la même forme que le système (27) dans le cas d'une seule équation différentielle algébrique. Le même procédé que dans ce dernier cas transformera alors, et de même manière, ce système (62) en un système canonique et conduira à son intégration sous la forme d'expressions des fonctions inconnues $y_1, \ldots y_{m+2}$ comme fonctions du paramètre t. *Ces fonctions s'exprimeront au moyen des fonctions u_n de la suite canonique de la même manière et sous la même forme comme dans le cas précédemment étudié d'une seule équation différentielle*

Considérons à titre d'exemple le système

$$\frac{dy_1}{dt} = A_1 y_1^{m_1} y_2^{m_2} ,$$

(63)

$$\frac{dy_2}{dt} = A_2 y_1^{n_1} y_2 .$$

Le changement

$$A_1 y_1^{m_1} y_2^{m_2} = y_1 e^{z_1},$$

(64)

$$A_2 y_1^{n_1} y_2^{n_2} = y_2 e^{z_2}$$

conduit aux équations

$$\frac{dz_1}{dt} = (m_1 - 1) e^{z_1} + m_2 e^{z_2},$$

$$\frac{dz_2}{dt} = n_1 e^{z_1} + (n_2 - 1) e^{z_2}.$$

Lorsque m_1 et n_2 différent de 1, le changement

(65)

$$u_1 = z_1 \log (m_1 - 1),$$
$$u_2 = z_2 + \log m_2 ,$$
$$u_3 = z_1 + \log n_1 ,$$
$$u_4 = z_2 + \log (n_2 - 1),$$

ramène le système (63) au système canonique

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_3}{dt} = e^{u_1} + e^{u_2},$$

(66)

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{du_4}{dt} = e^{u_3} + e^{u_4} .$$

Dans le cas où l'un des entiers m_2, n_1 est nul, ou bien où l'un des entiers m_1, n_2 est égal à 1, le changement (65) correspondant se réduirait à $u_i = z_k$.

Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les termes de la suite canonique correspondant au systéme canonique (66); les équations (65) fourniront les fonctions z_1 et z_2 sous la forme

$$z_1 = u_1 - \log(m_1 - 1) = u_3 - \log n_1$$
$$z_2 = u_2 - \log m_2 = u_4 - \log(n_2 - 1)$$

et des équations (64) on tire alors

$$\log y_1 = \frac{(n_2 - 1)\, u_1 - m_2 u_2 + B_1}{\Delta}$$

$$\log y_2 = \frac{(m_1 - 1)\, u_2 - n_1 u_1 + B_2}{\Delta}$$

où

$$B_1 = m_2 \log(n_1 A_2) - (n_2 - 1) \log[(m_1 - 1) A_1]$$
$$B_2 = n_1 \log[(m_1 - 1) A_1] - (m_1 - 1) \log[n_1 A_2]$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 - 1 & m_2 \\ n_1 & n_2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Il ne pourra y avoir d'indétermination que dans le cas où $\Delta = 0$. Mais désignant alors par α la valeur commune à deux nombres

$$\frac{m_1 - 1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2 - 1}$$

et en posant

$$(67) \qquad y_1 = e^{\int A_1 \theta\, dt}, \qquad y_2 = e^{\int A_2 \theta^{\frac{1}{\alpha}}\, dt}$$

où θ désigne une fonction arbitraire de t, on s'assure facilement que si y_1 et y_2 sont liées par la première relation (63), elles seront forcément liées par la seconde, de sorte que les deux équations du système (63) ne sont pas distinctes. En effet, de la première équation (67) on tire

$$\frac{dy_1}{dt} = A_1 \theta y_1 \tag{68}$$

et de la seconde

$$\frac{dy_2}{dt} = A_2 \theta^{\frac{1}{\alpha}} y_2 . \tag{69}$$

Comparées aux équations (63), l'équation (68) se réduit à

$$y_1^{m_1-1} y_2^{m_2} = \theta$$

et la seconde à

$$y_1^{\alpha n_1} y_2^{\alpha (n_2-1)} = \theta$$

et comme l'on a

$$m_1 - 1 = \alpha n_1, \quad m_2 = \alpha (n_1 - 1) ,$$

la seconde équation est la conséquence de la première. Le système (63) n'est pas dans ce cas un système proprement dit; il comporte effectivement une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire.

En terminant, j'ajoute que le but qu'on s'est proposé dans ce Mémoire est celui de signaler l'intérêt que présente et le rôle que pourrait jouer la suite canonique dans le problème général d'intégration des équations différentielles algébriques et des systèmes de telles équations. Il serait aussi intéressant de s'assurer si les termes de la suite canoniqne s'expriment en termes finis au moyen des transcendantes rencontrés jusqu'à présent (comme c'est le cas des premiers termes de la suite, ceux que fournissent les systèmes canoniques d'ordre $p=2$), ou bien si l'augmetation de p conduira à des transcendantes essentiellement nouvelles comme termes de cette suite. A partir de quelle valeur du nombre p apparaîtront des transcendantes nouvelles?

Un autre problème non moins intéressant serait celui de savoir si les transcendantes u_k, termes de la suite canonique sont distinctes entre elles, c'est-à-dire s'il n'y a pas entre elles des relations en termes finis. Dans le cas de telle dépendance le système canonique rattaché à l'équation à intégrer serait réductible à un système de même forme composé d'un plus petit nombre d'équations.

Enfin, il est à remarquer que le système canonique (4) peut être remplacé par un système algébrique, dont les fonctions inconnues seraient les fonctions $w_k = \int e^{u_k}\, dt$.

Les logarithmes des fonctions y_k de l'équation à intégrer s'exprimerait alors comme fonctions linéaires des w_k, à coefficients nombres entiers, et cela sans aucun cas exceptionnel.

Remarque. — Il convient de rappeller qu'un théorème du genre précédant sur la réduction des équations différentielles algébriques a été démontré par Appelrot et Lagoutinski. Mais n'ayant pas pu avoir leurs Mémoires et ne connaissant pas exactement leurs théorèmes ni les démonstrations, je n'ai pas pu en profiter et les citer.