Sur l'équation différentielle des lignes de courbure*)

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

1. — L'équation différentielle déterminant les projections des lignes de courbure sur le plan des xy de la surface

$$(1) \qquad z = F(x, y)$$

est

$$(2) \qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

ou bien

$$(3) \qquad [pqt - (1+q^2)s]\,dy^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\,dx\,dy - $$
$$- [pqr - (1+p^2)s]\,dx^2 = 0,$$

où

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Considérons maintenant l'enveloppe des plans

$$z + ux + vy = \theta(u, v);$$

elle a pour équations

*) Cette Note est résumée dans les *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France de l'année 1937.*

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{\partial\theta}{\partial u}, \\ y &= \frac{\partial\theta}{\partial v}, \\ z &= \theta - ux - vy, \end{aligned}$$

θ désignant une fonction pour laquelle le hessien

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right)^2 - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}$$

est différent de zéro.

De la relation

$$z = \theta - u\frac{\partial\theta}{\partial u} - v\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

en vertu des équations (4), il s'ensuit que

$$dz = -u\,dx - v\,dy\,.$$

En comparant la dernière relation à la suivante

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on trouve

$$(5)\qquad p = -u\,,\quad q = -v.$$

Des relations (4) on tire

$$(6)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}dv\,, \\ dy &= \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}du + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}dv\,. \end{aligned}$$

L'équation (2), selon les relations (5) et (6), devient

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\left[(1+u^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + uv\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right]dv^2 + \\ &+\left[(1+u^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - (1+v^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right]du\,dv - \\ &-\left[(1+v^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + uv\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right]du^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Cette équation est caractérisée par le fait suivant:

Les coefficients de l'équation (7), *définissant les lignes de courbure de la surface* (4), *ne contiennent pas les dérivées premières de* θ *prises par rapport à* u *et* v.

On peut en tirer diverses conséquences.

Premier exemple. Si l'on suppose que

$$(1+u^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+uv\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0,$$

on en tire

$$\theta=\int f\left(\frac{v^2}{1+u^2}\right)dv+\varphi(u),$$

f et φ étant des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

Par suite, *un système des lignes de courbure de la surface*

$$x=\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$y=\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

$$z=\theta-u\frac{\partial\theta}{\partial u}-v\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

$$\theta=\int f\left(\frac{v^2}{1+u^2}\right)dv+\varphi(u)$$

s'obtient en ajoutant à ces dernières relations la suivante

$$u=C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Si l'on égale à zéro le coefficient

$$(1+v^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+uv\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}$$

de l'équation (7), on arrive à un résultat analogue au précédent.

Second exemple. La détermination des surfaces dont on connaît un système de projections des lignes de courbure dans le plan xOy, à savoir

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

exige l'intégration de l'équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre

$$(8)\qquad r\,.\,[pq+f\,.\,(1+q^2)]+s\,.\,[f^2.\,(1+q^2)-(1+p^2)]-$$
$$-t\,.\,[pq\,f^2+f\,.\,(1+p^2)]=0\,.$$

Les expressions qui multiplent r, s, t *contiennent* x, y, p, q.

Cependant, si l'on considère l'équation (7) et si l'on donne d'avance l'équation

$$\frac{dv}{du}=\varphi\,(u,v)\;,$$

on trouve, comme l'équation du problème, l'équation suivante

$$[uv-\varphi\,.\,(1+u^2)]\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+[1+v^2-\varphi^2.\,(1+u^2)]\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+$$
$$+[\varphi\,.\,(1+v^2)-u\,v\,\varphi^2]\,\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0\,.$$

Or, *dans ce cas, les expressions multipliant*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\,,\quad\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\,,\quad\frac{\partial\,\theta}{\partial v^2}$$

ne renferment que les variables indépendantes u *et* v.

Il est probable qu'on peut en tirer aussi des conséquences. En tous cas la dernière équation est plus simple que (8).

2. — Dans la Note[1]) "*Théorème sur les lignes asymptotiques*" nous avons montré que *les asymptotiques de la surface*

$$x=u\,,$$
$$y=v,$$
$$z=\theta\,(u,v)$$

correspondent à celles de l'enveloppe des plans

$$z+ux+vy=\theta\,(u,v).$$

Comme nous l'avons vu, pour les lignes de courbure de ces surfaces il n'existe pas une telle simple correspondance.

[1]) Mathesis, t. L. 1936, p. 367—368.

Voir aussi: Robert Godeau, *A propos d'un théorème sur les lignes asymptotiques* (*Mathesis*, t. L. 1936, p. 368—369).