Sur les singularités des fonctions définies par les séries de Taylor

Par

M. GEORGES VALIRON

Considérons une série de Taylor

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

admettant l'unité pour rayon de convergence, et soit $f(z)$ la fonction analytique définie par prolongement radial de la somme de cette série. Soit φ le minimum de la valeur absolue de l'argument des singularités de $f(z)$ situées sur la circonférence $|z| = 1$. Si, h étant donné positif et moindre que 1, $R(h)$ est le rayon de convergence de $f(h+\xi)$ développée autour de $\xi=0$, on a d'après un théorème de M. Mandelbrojt (1),

$$\cos\varphi = \lim_{h=0} \frac{1-R(h)}{h} \tag{1}$$

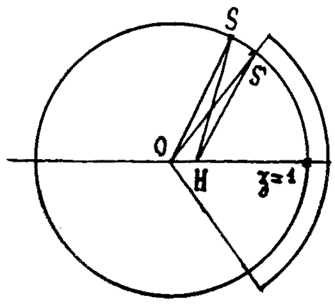
Je me propose de présenter ici quelques remarques sur cette formule et ses conséquences.

1. Voici la démonstration simple que j'ai donnée de la formule (1)[2]. Soient O l'origine, H le point d'affixe h, S le

[1]) *Comptes Rendus*, 204, 1937, p. 1456—1458.

[2]) Dans une lettre adressée le 5 mai 1937 à M. Hadamard. M. Hadamard a indiqué ce mode de démonstration (*Comptes Rendus*, ibid., p. 1458) pour le cas surtout envisagé par M. Mandelbrojt où l'on fait préalablement la transformation d'Euler.

point d'affixe $e^{\pm i\varphi}$ qui est singulier (voir la figure). Dans le triangle OHS, on a



$$R(h)^2 \leq 1 + h^2 - 2h \cos \varphi . \tag{2}$$

Si $\varphi \neq 0$, à ε positif donné inférieur à φ correspond $\delta(\varepsilon)$ tel que $f(z)$ est encore holomorphe pour

$$|\arg z| < \varphi - \varepsilon, \quad |z| < 1 + \delta(\varepsilon).$$

Le triangle OHS' (voir la figure) donne aussi l'inégalité

$$R(h)^2 > 1 + h^2 - 2h \cos(\varphi - \varepsilon) \tag{3}$$

pourvu que

$$h + \sqrt{1 + h^2 - 2h\cos(\varphi - \varepsilon)} < 1 + \delta(\varepsilon),$$

ce qui a lieu pour h assez petit, en particulier $2h < \delta(\varepsilon)$.

D'après (2) et (3), on a

$$\frac{-2\cos(\varphi - \varepsilon) + h}{R(h) + 1} \leq \frac{R(h) - 1}{h} \leq \frac{-2\cos\varphi + h}{R(h) + 1}, \tag{4}$$

ce qui établit la proposition (1) pour $\varphi \neq 0$, puisque ε est arbitrairement petit et

$$|R(h) - 1| \leq h. \tag{5}$$

Cette dernière inégalité, qui est évidente, établit le théorème pour $\varphi = 0$; il est d'ailleurs bien connu que, pour que le point $z = 1$ soit singulier, il faut et il suffit que $R(h) = 1 - h$.

2. L'égalité (1) exprime un fait purement géométrique. On a pris h réel positif pour se placer dans le cas canonique. Si l'on prend un point M voisin de O, d'affixe $he^{i\theta}$, $h > 0$, et si $R(M) = R(h, \theta)$ est le rayon de convergence $f(he^{i\theta} + \zeta)$ développée autour de $\zeta = 0$, c'est-à-dire la plus courte distance de M aux singularités de $f(z)$, les mêmes considérations s'appliquent. En particulier, si $z = 1$ est la seule singularité sur $|z| = 1$, $f(z)$ est holomorphe pour $\varepsilon < |\arg z| \leq \pi$, $|z| < 1 + \delta(\varepsilon)$ et si $\varepsilon \leq |\theta| \leq \pi$, (4) montre que, pourvu que $2h < \delta(\varepsilon)$, on a

$$\frac{-2\cos(|\theta|-\varepsilon)+h}{R(h,\theta)+1} \leqq \frac{R(h,\theta)-1}{h} \leqq \frac{-2\cos\theta+h}{R(h,\theta)+1};$$

il s'ensuit que

$$(6) \qquad \frac{h-2\cos(|\theta|-\varepsilon)+(R(h,\theta)+1)\cos\theta}{R(h,\theta)+1} \leqq \frac{R(h,\theta)-1}{h}+\cos\theta$$

$$\leqq \frac{(R(h,\theta)-1)\cos\theta+h}{R(h,\theta)+1}.$$

Pour $0 \leqq |\theta| \leqq \varepsilon$, la seconde partie de l'inégalité (6) reste valable, et comme on a toujours

$$(7) \qquad |R(h,\theta)-1| \leqq h,$$

la première partie peut être remplacée par

$$(8) \qquad \cos\varepsilon - 1 \leqq \frac{R(h,\theta)-1}{h}+\cos\theta$$

Il résulte de ces inégalités que la fonction $R(M)$ possède à l'origine un gradient qui est le vecteur joignant O au point $z=-1$[3]. L'inégalité (7) montre en effet que le troisième membre de (6) est moindre que $2h$ tandis que le premier membre, où l'on peut remplacer $\cos(|\theta|-\varepsilon)$ par $\cos\theta\cos\varepsilon+\sin|\theta|\sin\varepsilon$, est supérieur à $-2(1+\varepsilon-\cos\varepsilon)$; on a donc dans tous les cas

$$\left|\frac{R(h,\theta)-1}{h}+\cos\theta\right| < 2(1+\varepsilon-\cos\varepsilon) < 3\varepsilon$$

pourvu que h soit inférieur à ε et $\delta(\varepsilon)$, avec $\varepsilon<1$. On trouve ainsi, comme conséquence de (4), le théorème donné par M. Golab dans la note citée: *si $R(M)$ est la distance de M à un ensemble fermé plan E, $R(M)$ a un gradient en chaque point M extérieur à E en lequel la cir-*

---

[3]) M. Golab (*Comptes Rendus*, 206, 1938, p. 406—408) a prouvé, dans ces conditions, l'existence de la différentielle de Stolz-Fréchet de la fonction $R(M)$. Me plaçant ici (avec beaucoup d'auteurs qui ont publié dans les *Comptes Rendus* des considérations sur le théorème de Mandelbrojt) à un point de vue purement géométrique, j'introduis le gradient. Dire qu'une fonction de point $F(M)$ a un gradient en M, c'est dire qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{MV}$ tel que $F(M')-F(M)=\overrightarrow{MM'}.(\overrightarrow{MV}+\varepsilon(\overrightarrow{M'}))$, avec $|\varepsilon(\overrightarrow{M'})|<\varepsilon$ si $|\overrightarrow{MM'}|<\eta$. Voir par exemple, Appell, *Analyse mathématique*, 5e édition, tome I, p. 273.

conférence de centre M et rayon $R(M)$ ne contient qu'un point M' de E. Le gradient a évidemment pour mesure 1 et est porté par $M'M$ dans le sens de M' vers M.

3. Pour utiliser l'égalité (1) dans l'étude des singularités, on écrit (1) sous la forme

$$\cos \varphi - \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{R(h)} - 1 \right)$$

et l'on sait que

$$\frac{1}{R(h)} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(h)}{n!} \right|} .$$

M. Hadamard a établi dès 1892 [4]) que, dans le calcul de $R(h)$, on peut remplacer l'expression

$$(9) \qquad \frac{f^{(n)}(h)}{n!} = a_n + C^1_{n+1} a_{n+1} h + \cdots + C^q_{n+q} a_{n+q} h^q + \cdots$$

par ses p premiers termes, p étant convenablement choisi. En particulier d étant donné positif, on peut se borner à prendre $q \leq dn$. On a donc

$$(10) \qquad \cos \varphi = \lim_{h=0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|P_n(h)|} - 1 \right] \right\}$$

avec

$$(11) \qquad P_n(h) = a_n + C^1_{n+1} a_{n+1} h + \cdots + C^p_{n+p} a_{n+p} h^p, \quad p \leq dn < p+1$$

Pour cette valeur p, la démonstration est d'ailleurs immédiate: si m est assez grand, $|a_m|$ est inférieur à 2^m, donc, si $8h < 1$,

$$\sum_{q>p} C^q_{n+q} |a_{n+q}| h^q < 2^n \sum_{q<p} C^q_{n+q} (2h)^q < 2^n \sum_{q>p} 2^{n+q} (2h)^q =$$

$$= 4^n \frac{(4h)^{p+1}}{1-4h} < 2 [4(4h)^d]^n .$$

4) *Jour. de Math.*, 4 sér., 8. 1892. p. 112—115; *Scientia*, nº 12, 1901, p. 22 Voir aussi une Note de M. Biggeri, *Comptes Rendus*, 206, 1938, p. 231—233.

Ce reste est donc inférieur à 2^{1-n} si $8(4h)^d < 1$ et si n est assez grand, ce qui établit l'égalité (10).

On pourrait donner une forme analogue à la formule de M. Mandelbrojt (loc. cit.) en diminuant le nombre des termes de son polynome $d_n(h)$; l'avantage est que, dans la formation des exemples, les groupes de coefficients que, l'on fait intervenir sont indépendants. Les méthodes classiques de MM. Hadamard et Fabry conduiraient à mettre en évidence dans $P_n(h)$ le terme en h^q, q étant la partie entière de $hn\,(1-h)$; c'est ce qu'a fait M. Biggeri dans sa Note citée.

4. Nous appliquerons à l'étude de $P_n(h)$ une méthode indiquée par M. Mandelbrojt[5]), mais en la présentant sous une forme plus simple, qui permettra de discuter plus facilement sa portée.

Supposons qu'il existe une suite infinie de valeurs n_k de n pour lesquelles $P_n(u)$, où u est complexe, ne s'annule pas dans un cercle fixe $|u| < \alpha$.

Compte tenu de la majoration classique

$$\sum_0^{\infty} C_{n+q}^q \,|a_{n+q}|\,|u|^q > \frac{M(\beta)}{(1-|u|-\beta)^{n+1}}, \qquad \beta > 0, \qquad |u| < 1-\beta,$$

on voit que, pour $n = n_k$, la suite de fonctions

$$\psi_n(u) = \sqrt[n]{P_n(u)}$$

(où l'on prend, par exemple, pour valeur $\psi_n(0)$ celle dont l'argument est réduit) est holomorphe et uniformément bornée pour $|u| < \alpha'$, α' étant inférieur à α et à 1. D'après un théorème de M. Montel, on peut extraire de cette suite une suite qui converge uniformément dans ce cercle vers une fonction holomorphe $\psi(u)$. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \qquad n = n_k,$$

on aura

$$\varphi(u)\,e^{i\gamma} = 1 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots$$

---

[6]) *Comptes Rendus*, 206, 1938, p. 730–732.

τ étant une constante réelle, et le second membre de cete égalité est la limite de la suite uniformément convergente

$$\sqrt[n]{1+C^1_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}u+\cdots+C^p_{n+p}\frac{a_{n+p}}{a_n}u^p}=$$
$$=1+B^n_1 u+B^n_2 u^2+\cdots \qquad n=n_k'.$$

Pour chaque q, B^n_q tend vers b_q lorsque n croît indéfiniment. Egalant les puissances n des deux membres de l'identité précédente, on voit que

$$(13) \qquad b_1=\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n=n_k',$$

et que, pour chaque q fini

$$C^q_{n+q}\frac{a_{n+q}}{a_n}=C^q_n B^n_q+Q(n,B^n_j),$$

Q étant un polynome de degré $q-1$ en n. Il s'ensuit notamment que

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} n\left(\frac{a_{n+q}}{a_n}-\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^q\right)=D_q$$

D_q s'exprimant au moyen des b_j.

De (13) on tire un énoncé analogue à celui donné par M. Mandelbrojt à partir de ses polynomes $d_n(h)$ (loc. cit.):

Si les polynomes $P_n(u)$ ne s'annulent pas dans $|u|<\alpha$ pour une suite $n=n_k$ de valeurs pour lesquelles (12) est réalisée, on a

$$\cos\varphi \geqq \overline{\lim_{n=\infty}}\, \mathcal{R}\frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n=n_k.$$

On a en effet, pourvu que h soit assez petit,

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n]{|P_n(h)|}\geqq|\psi(h)|\geqq\mathcal{R}\,\psi(h)=1+h\,\mathcal{R}\,b_1+\cdots$$

Les égalités (14) donnent des conditions d'application de cette proposition. On aurait des conditions analogues dans le cas envisagé par M. Mandelbrojt.

Compte tenu de (19), les conditions (14) s'écrivent aussi si $b_1 \neq 0$,

$$(15) \qquad \frac{a_{n+q}}{a_{n+q-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{D_q' + o(1)}{n}, \qquad n = n_k'$$

elles sont à rapprocher de celles employées par M. Hadamard dans sa Thèse (loc. cit.). En particulier, *cette méthode ne peut pas donner le théorème le plus simple de M. Fabry*: si a_{n+1}/a_n tend vers 1, le point $z=1$ est singulier. Car, les conditions (15) ne sont réalisées pour aucune suite $n=n_k$, si l'on prend

$$a_{2p+1} = a_{2p}, \quad a_{2p+2} = a_{2p+1}(1 + \lambda(p)), \quad p = 1, 2, \ldots$$

avec

$$\lim_{p=\infty} \lambda(a) = 0, \qquad \lim_{p=\infty} p(\lambda)p = \infty .$$