Das St. Venantsche Prinzip

Von

J. KLITCHIEFF

Betrachten wir die elastischen Grundgleichungen, die bei fehlender Massenkraft von der Form sind:

$$\text{(1)}\qquad \nabla u+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=0,\qquad \nabla v+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=0,\qquad \nabla w+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=0,$$

wo u, v, w die Verschiebungskomponenten, μ den *Poisson*schen Koeffizienten bezeichnen, und $\varepsilon=\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z$, $\nabla=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ ist. Eine von *Lord Kelvin* stammende Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\text{(2)}\qquad u=A\frac{xz}{r^3},\quad v=A\frac{yz}{r^3},\quad w=A\left(\frac{z^2}{r^3}+\frac{3-4\mu}{r}\right),$$

wo $r^2=x^2+y^2+z^2$ ist und A eine Konstante bezeichnet.

Den Koordinatenursprung setzen wir in das Innere eines von einer Fläche S umschlossenen Hohlraumes. Die der Lösung (2) entsprechenden Spannungskomponenten ergeben sich dem Hookeschen Gesetze nach als

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2AG\frac{z}{r^3}\left(1-2\mu-3\frac{x^2}{r^2}\right), \\
\sigma_y &= 2AG\frac{z}{r^3}\left(1-2\mu-3\frac{y^2}{r^2}\right), \\
\sigma_z &= -2AG\frac{z}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right), \\
\tau_x &= -2AG\frac{y}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right), \\
\tau_y &= -2AG\frac{x}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right), \\
\tau_z &= -6AG\frac{xyz}{r^3},
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

wo G den Schubmodul bezeichnet. Dann lassen sich auch die Komponenten der Oberflächenkräfte pro Flächeneinheit berechnen mittels den Gleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
p_x &= \alpha\sigma_x + \beta\tau_z + \gamma\tau_y, \\
p_y &= \beta\sigma_y + \gamma\tau_x + \alpha\tau_z, \\
p_z &= \gamma\sigma_z + \alpha\tau_y + \beta\tau_x,
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

wo α, β, γ die Richtungskosinuse der Normale zur Oberfläche bezeichnen.

Bei fehlender Massenkraft müssen die Oberflächenkräfte im Gleichgewicht stehen, d. h. es müssen sich die Kräfte auf der Fläche S auf eine Kraft und ein Kräftepaar reduzieren, die sich nur durch das Vorzeichen von denen unterscheiden, auf die sich die Kräfte auf der übrigen Oberfläche S' des Körpers reduzieren. Ist diese letzte gegeben, dann sind die sie angreifenden Kräfte durch die Gleichungen (3) und (4) bestimmt, demnach sind auch die Kräfte und das Kräftepaar bestimmt, auf die sich die Kräfte reduzieren, die die Fläche S angreifen, unabhängig davon, welche Form diese Fläche besitzt. Wir können, also, diese Kräfte und dieses Kräftepaar berechnen, indem wir den Hohlraum in Form einer Kugel vom Halbmesser ϱ annehmen.

Setzen wir dementsprechend in die Gleichungen (4) ein: $\alpha = -x/\varrho$, $\beta = -y/\varrho$, $\gamma = -z/\varrho$, bekommen wir:

$$p_x = 6AG\frac{xz}{\varrho^4}, \quad p_y = 6AG\frac{yz}{\varrho^4}, \quad p_z = 2AG\frac{1}{\varrho^2}\left(3\frac{z^2}{\varrho^2}+1-2\mu\right),$$

die sich auf eine im Koordinatenursprung in der Richtung der z Achse angreifende Kraft $P = 16\pi(1-\mu)AG$ reduzieren. Der Ausdruck ist von ϱ unabhängig, wir dürfen, also, die Kugel unendlich klein annehmen und die Verschiebung (2), als durch eine im Punkte (0, 0, 0) angreifende konzentrierte Kraft entstanden betrachten.

Um die Verschiebungen zu finden, die einer im Punkte 0, 0, h) angreifenden Kraft entsprechen, haben wir in den Gleichungen (2) z mit $z-h$ zu ersetzen. Nehmen wir aber h klein an, dann lassen sich die Ausdrücke in Potenzreihen entwickeln die, beim Weglassen der Glieder zweiter Ordnung in h, ergeben:

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{xz}{r^3} - A\left(\frac{x}{r^3} - 3\frac{xz^2}{r^5}\right)h, \\ v &= A\frac{yz}{r^3} - A\left(\frac{y}{r^3} - 3\frac{yz^2}{r^5}\right)h, \\ w &= A\left(\frac{z^2}{r^3} - \frac{3-4\mu}{r}\right) - A\left(\frac{2z}{r^3} - 3\frac{z^3}{r^5} - \frac{3-4\mu}{r^3}z\right)h. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Wen gleichzeitig zwei Kräfte: $-P$ im Punkte (0, 0, 0) und P im Punkte (0, 0, h) angreifen, findet man die entsprechende Verschiebung, als Differenz der Ausdrücke (5) und (2). Diese von *Boussinesq* stammende Lösung zeigt, dass, wenn zwei gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kräfte zwei nahe aneinander liegende Punkte angreifen, die Verschiebung eines Punktes des Körpers dem gegenseitigen Abstand der Angriffspunkte direkt und dem Quadrat des Abstandes des betrachteten Punktes von den Angriffspunkten umgekehrt proportional ist. Ein solches System von Kräften erzeugt also l o k a l e Verschiebungen, die nur in unmittelbarer Umgebung der Angriffspunkte bemerkbar sind. Die Spannungen nehmen noch rascher ab.

In der Statik des starren Körpers setzt man zwei Kräfte, die verschiedene Punkte angreifen, auf die Weise zu einer Resultierenden zusammen, dass man zwei in diesen Punkten angreifende gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte angebracht denkt. Ist der gegenseitige Abstand der gegebenen Angriffspunkte klein, verursacht man dadurch, wie wir oben sahen, lokale Spannungen in der Umgebung der Angriffspunkte.

Betrachten wir einen prismatischen Stab, dessen Endquer-Schnitte beliebige Kräfte angreifen. Wir zerlegen jede dieser Kräfte in zwei Komponenten, eine in der Längsrichtung die andere im Querschnitte selbst. Sind die Abmessungen des Querschnittes klein im Vergleich zu der Länge des Stabes, werden die Abstände der Angriffspunkte dieser Kräfte auch klein. Man darf also die in der Längsrichtung wie auch die in der Quer-Schnittsfläche wirkenden Kräfte zu einer Resultierenden bzw. zu einem Kräftepaar zusammensetzen, wenn man die lokale Beanspruchung der Umgebung des belasteten Querschnitts vernachlässigen darf. Das stimmt vollkommen überein mit dem St. Venantschen Prinzip der „elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichwertiger Belastung eines Stabes“.