Sources d'identités

Par

D. POMPEIU

On connaît l'importance et l'utilité des *identités* dans toutes les branches des Sciences mathématiques.

Dans une communication faite cette année, à la Société roumaine des mathématiques, je me suis occupé des intégrales (définies ou indéfinies) et des solutions des équations aux dérivées partielles — comme *sources d'identités*.

1. J'extrais de cette communication les lignes qui suivent.

Soit

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz$$

une intégrale de variable complexe, portant sur une fonction rationnelle: le dénominateur $Q(z)$ est un polynôme dont le degré dépasse d'au moins *deux* unités le degré de $P(z)$.

Je suppose toujours le contour fermé C pris de façon à contenir *tous* les zéros de $Q(z)$.

Dans ces conditions on a, évidemment,

$$I = 0$$

Mais il faut remarquer qu'on doit écrire *identiquement*

$$I \equiv 0$$

car la nullité de I a lieu quels que soient les zéros de $Q(z)$, dans les conditions où nous nous plaçons.

2. Passons à une application, la plus simple possible.
Je prends

$$P(z) = z - a$$
$$Q(z) = (z-b)(z-c)(z-d)$$

J'aurai dans ces conditions

$$I = \frac{b-a}{(b-c)(b-d)} + \frac{c-a}{(c-b)(c-d)} + \frac{d-a}{(d-b)(d-c)} = 0$$

3. Interprétation géométrique de cette *identité:*

1° D'abord: si, dans le plan complexe, les points b, c, d forment un triangle équilatéral (le point a étant *quelconque*) on a un théorème de géométrie élémentaire, que j'ai déjà signalé ailleurs:

Si dans le plan d'un triangle équilateral BCD on prend un point A quelconque, avec les trois longueurs AB, AC, AD on peut toujours former un triangle.

2° Si dans l'indentité

$$I \equiv 0$$

les points a, b, c, d sont *quelconques*, on peut chasser les dénominateurs et obtenir *l'identité:*

$$K \equiv (b-a)(d-c) + (c-a)(b-d) + (d-a)(c-b) \equiv 0$$

avec laquelle, en évaluant le module de la somme de deux termes — on parvient au théorème classique de géométrie élémentaire:

Dans un quadrilatère quelconque le produit des diagonales est inférieur à la somme des produits des côtés opposés.

3° Enfin, supposant a, b, c, d réels et disposés sur l'axe Ox, posons

$$a = x_1, \quad b = x_2, \quad c = x_3, \quad d = x_4 .$$

L'identité

$$K \equiv 0$$

s'écrit alors:

$$(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(x_3-x_1)(x_2-x_4)+(x_4-x_1)(x_3-x_4)=0.$$

Cette identité va nous permettre de démontrer un théorème de géométrie d'espace :

Si dans un tétraèdre deux couples d'arrêtes opposées sont rectangulaires, il en est de même du troisième couple.

En effet soient

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$$

les sommets du tétraèdre et

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\quad x_2,\ y_2,\ z_2,\ldots$$

les coordonnées de ces sommets.

Ecrivons que deux couples d'arrêtes opposées sont rectangulaires.

L'identité ci-dessus en x et deux autres identités analogues en y et en z nous permettent de conclure que le troisième couple est formé aussi d'arrêtes rectangulaires.