Ueber ein nichtholonomes Pendel

Von

ANTON BILIMOVITCH

Das Studium materieller Systeme mit im vorhinein vollständig oder teilweise bestimmten inneren Bewegungen, d. h. relativen Bewegungen einiger Teile des Systems in bezug auf die anderen, ist theoretisch und praktisch von grossem Interesse. Theoretisch, weil die Analyse der Bewegung derartiger Systeme, besonders im Falle nichtholonomer Mechanismen, neues Licht in den Mechanismus materieller Systeme bringt, praktisch, weil man bei zweckmässiger Auswahl jener inneren Bewegungen oft gewünschte Aenderungen in der Bewegung des Systems in bezug auf das ruhende Bezugssystem erreichen kann.

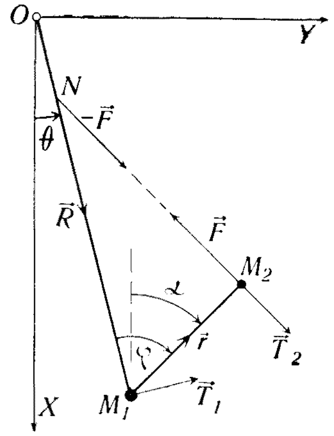

Fig. 1

In dieser Abhandlung möge beispielsweise die Bewegung des mit einem nichtholonomen Mechanismus innerer Wirkung verbundenen Pendels untersucht und gezeigt werden, wie man mit Hilfe jenes Mechanismus die Bewegung des Pendels selbst beeinflussen kann.

In einer vertikalen Ebene OXY (Fig. 1), wobei OX die Vertikale ist, bewege sich der mit der Masse m_1 belegte Punkt M_1 des mathematischen Pendels. Der Punkt

M_1 sei mittels des Stabes $OM_1 = R$ mit dem Punkte O verbunden. Durch den Winkel $XOM_1 = \theta$ ist die Lage des Pendels gegeben.

Mit dem Punkte M_1 sei mittels des Stabes unveränderlicher Länge $M_1M_2 = r$ ein anderer mit der Masse m_2 belegte Punkt M_2 verbunden. Auch dieser Punkt bewege sich in der Ebene OXY; seine Lage ist durch den Winkel $\varphi = OM_1M_2$ gegeben. In der beiliegender Figur ist der positive Sinn der Winkel θ und φ angegeben.

Nehmen wir nun an, zwischen den Stäben R und r wirke ein nichtholonomer Mechanismus, der die Bindung

$$\varphi = k\theta' \tag{1}$$

gewährleistet, wobei k ein konstanter Koeffizient und $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ ist.

Führen wir ein konkretes Beispiel an. Eine auf einer Schaukel (Masse m_1) schwingende Person (Masse m_2), die sich mit den Händen an den Stab R hält, ist imstande sich jederzeit in eine derartige Lage (Winkel φ) zu stellen, dass je nach der Grösse der Geschwindigkeit θ' die Gleichung (1) befriedigt erscheint. Es ist ebenfalls unschwer, das Schema eines automatischen Getriebes zu entwerfen, das 1. die Geschwindigkeit θ' messend, 2. dem Punkt M_2 eine Lage φ zuweist, welche die Gleichung (1) befriedigt.

Bezeichnen $\vec{T}_1$ und $\vec{T}_2$ die auf die Richtungen $\vec{R}$ bzw. $\vec{r}$ senkrechten Einheitsvektoren, dann sind die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ der Punkte M_1 bzw. M_2 durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht

$$\vec{v}_1 = R\theta'\vec{T}_1, \qquad \vec{v}_2 = R\theta'\vec{T}_1 + r\alpha'\vec{T}_2,$$

worin $\alpha = \varphi - \theta$ ist. Nach durchgeführter Differentiation erhält man die nachstehenden Ausdrücke für die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= R\theta''\vec{T}_1 - \theta'^2\vec{R}, \\ \vec{u}_2 &= R\theta''\vec{T}_1 - \theta'^2\vec{R} + r\alpha''\vec{T}_2 - \alpha'^2\vec{r}. \end{aligned} \tag{2}$$

Führen wir jetzt die Kräfte an, die auf unser System einwirken. Dabei fassen wir jeden der Punkte m_1 und m_2 als einen reduzierten festen Körper auf, der aus der Masse des Punktes und des mit ihm fest verbundenen Stabes besteht, wobei wir aber die Masse des Stabes gegenüber jener des Punktes vernachlässigen. Auf den Körper m_1 wirken folgende Kräfte: 1. die Schwerkraft $m_1 \vec{g}$ mit dem Angriffspunkte M_1, 2. die Reaktion $\vec{S}_1$ im Punkte O, 3. die Reaktion $\vec{S}_2$ im Punkte M_1, 4. die Reaktion $(-\vec{F})$ des nichtholonomen Mechanismus etwa im Punkte N des Stabes OM_1. Auf den Körper m_2 wirken: 1. die Schwerkraft $m_2 \vec{g}$ mit dem Angriffspunkte M_2, 2. die Reaktion $(-\vec{S}_2)$ in Punkte M_1, 3. die Reaktion $\vec{F}$ des nichtholonomen Mechanismus mit dem Angriffspunkte in M_2. Dieser Mechanismus kann auch die besondere Wirkung besitzen, bei der die Kraft $\vec{F}$ stets senkrecht auf die Gerade $M_1 M_2$ gerichtet ist.

Wollen wir zwecks Beschreibung der Bewegung des mit der Zusatzmasse m_2 versehenen Pendels den Satz des Momentes der Quantität der Bewegung in bezug auf den unbeweglichen Pol O verwenden, so haben wir nur die Kräfte $m_1 \vec{g}$ und $m_2 \vec{g}$ zu berücksichtigen, weil die übrigen Kräfte zusammen kein Moment in bezug auf diesen Pol ergeben. Der angegebene Satz liefert also die folgende Vektorgleichung:

$$[\vec{R}, m_1 \vec{u}_1] + [\vec{R} + \vec{r}, m_2 \vec{u}_2] = [\vec{R}, m_1 \vec{g}] + [\vec{R} + \vec{r}, m_2 \vec{g}]$$

Weil alle in dieser Gleichung vorkommenden Vektoren senkrecht zur Ebene der Bewegung gerichtet sind, kann diese Gleichung durch eine skalare, nur die algebraischen Werte dieser Vektoren enthaltende Gleichung ersetzt werden. Die Gleichungen (2) berücksichtigend, erhält man

$$(MR^2 - 2m\, Rr \operatorname{Cos} \varphi + mr^2)\, \theta'' + mr\,(R \operatorname{Cos} \varphi - r)\, \varphi'' -$$
$$- m\, Rr\, \varphi'\, (\varphi' - 2\theta') \operatorname{Sin} \varphi = -Mg\, R \operatorname{Sin} \theta - mgr \operatorname{Sin} (\varphi - \theta)\,,$$

wobei $m_1 + m_2 = M$; $m_2 = m$ gesetzt wurde.

Wird nun berücksichtigt, dass $\varphi = k\theta'$ ist, dann erhält die endgültige Gleichung zur Bestimmung des Winkels θ folgende Form:

$$(MR^2 - 2m\,Rr\,\mathrm{Cos}\,k\,\theta' + mr^2)\,\theta'' + mr\,k\,(R\,\mathrm{Cos}\,k\,\theta - r)\,\theta''' -$$

$$- m\,Rr\,k\,\theta''(k\,\theta'' - 2\theta')\,\mathrm{Sin}\,k\,\theta' = - Mg\,R\,\mathrm{Sin}\,\theta -$$

$$- mgr\,\mathrm{Sin}\,(k\theta' - \theta)\,.$$

Setzt man voraus, dass k eine kleine Zahl und demnach φ ein kleiner Winkel ist, dann erhält nach der Substitution $\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,k\,\theta' = k\,\theta'$; $\mathrm{Cos}\,\varphi = 1$ die vorstehende Gleichung die Form:

$$(3)\qquad \theta'' + n^2\,\mathrm{Sin}\,\theta + k\,(a_1\theta''' + a_2\theta'\,\mathrm{Cos}\,\theta) = 0\,,$$

wobei

$$n^2 = Pg\,(MR - mr),\qquad a_1 = P\,mr\,(R - r),\qquad a_2 = P\,mgr,$$

$$P = (MR^2 - 2mRr + mr^2)^{-1}$$

ist.

In dieser Gleichung sind die Glieder höherer als erster Potenz in bezug auf k vernachlässigt worden.

Wird in die Gleichung (3) gesetzt

$$\theta = x - k\,a_1\,\theta',$$

worin x eine neue Veränderliche darstellt und werden wiederum die Glieder k^2 u. s. w. vernachlässigt, dann erhält man

$$(4)\qquad x'' + n^2\,\mathrm{Sin}\,x + k\,\beta\,x'\,\mathrm{Cos}\,x = 0$$

worin

$$\beta = a_2 - n^2 a_1 = P^2 m\,(M - m)\,g\,Rr^2 = P^2\,m_1\,m_2\,g\,Rr^2$$

und deshalb $\beta > 0$ ist.

In der Gleichung (4) können die Fundamentalglieder $x'' + n^2\,\mathrm{Sin}\,x$ von dem Störungsglied $k\,\beta\,x'\,\mathrm{Cos}\,x$ unterschieden werden. Wird das Störungsglied vernachlässigt und wird die Gleichung wie folgt geschrieben

$$\xi'' + n^2 \operatorname{Sin} \xi = 0,$$

worin ξ eine neue unbekante Funktion ist; so entspricht diese Gleichung jener der Bewegung des mathematischen Pendels und kann auf die bekannte Weise mittels elliptischer Funktionen gelöst werden.

Zwecks Untersuchung der durch die Gleichung (4) gegebenen Bewegung sei eine neue Veränderliche $y = \frac{dx}{dt} = x'$ eingeführt; dann lautet diese Gleichung

$$y \frac{dy}{dx} + n^2 \operatorname{Sin} x + k \beta y \operatorname{Cos} x = 0. \tag{5}$$

Vergleichen wir mit dieser Gleichung jene, die das Störungsglied nicht enthält nämlich

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} + n^2 \operatorname{Sin} \xi = 0 \tag{6}$$

und die das Integral

$$\eta^2 - 2n^2 \operatorname{Cos} \xi = C \tag{7}$$

besitzt, worin C eine beliebige Integrationskonstante darstellt. Diesem Integral entsprechen zwei zur ξ-Achse symmetrischen Aeste I und II. Wenn $C > 2n^2$ ist, hat die Bewegung einen fortschreitenden Charakter. Die erwähnten Aeste schneiden die ξ-Achse nicht und begrenzen einen unendlichen Teil der $O\xi\eta$-Ebene. Wenn $C = 2n^2$ ist, haben wir den Fall der asymptotischen Bewegung, die Aeste I und II berühren die ξ-Achse. Wenn schliesslich $C < 2n^2$ wird, kann $\operatorname{Cos} \xi$ seinen Minimalwert $\operatorname{Cos} \xi = -\frac{C}{2n^2}$ erreichen, die Bewegung erhält einen oszillatorischen Charakter, die Aeste I und II schneiden die ξ-Achse und begrenzen einen endlichen Teil der Ebene.

Verweilen wir bei dem Fall der oszillatorischen Bewegung und untersuchen wir das relative Verhalten der durch die Gleichung (7) gegebenen Kurven der Fundamentalbewegung mit jenen, die durch das Integral von (5) gegeben sind. Sind die Initialbedingungen derartig, dass diese Kurven durch denselben

Punkt $\xi = x$, $\eta = y$ der Ebene hindurchgehen, dann ist die Lage der Tangenten in diesem Punkt durch Gleichungen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{n^2}{y}\,\mathrm{Sin}\,x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{n^2}{y}\,\mathrm{Sin}\,x - k\beta\,\mathrm{Cos}\,x$$

gegeben, so dass

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{d\xi} = -k\beta\,\mathrm{Cos}\,x \quad \text{oder} \quad tg\,a_p - tg\,a_g = -k\beta\,\mathrm{Cos}\,x$$

ist, wobei a_p und a_g die zugehörigen Winkel der Tangenten veranschaulichen. Wenn man nur die durch die Bedingung $\mathrm{Cos}\,x > 0$ gegebenen Oszillationen in Betracht zieht, hängt das Vorzeichen der Differenz tang a_p — tang a_g, d. h. auch das Vorzeichen der Differenz $a_p - a_g$ nur von dem Vorzeichen von k ab d. h. 1. für $k > 0$, $a_p < a_g$; 2. für $k < 0$, $a_p > a_g$ Im ersten Falle verläuft die Kurve (x, y) im Inneren des durch die Aeste der Kurve (7) begrenzten Gebietes un zweigt von der Kurve der Fundamentalbewegung mit den grösseren Amplituden in die Kurve mit kleineren Amplituden ab: die Wirkung des nichtholonomen Mechanismus dämpft die Oszillationen ab. Im zweiten Falle verläuft die Kurve (x, y) ausserhalb der Gebietes der Fundamentalbewegung, der nichtholonome Mechanismus verstärkt die Oszillationen des Pendels.

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Zurückführung der Veränderlichen x auf die Veranderliche θ, gemäss der Gleichung $\theta = x - k a_1 \theta'$, die wir auch wie folgt schreiben können

$$z = x - k a_1 y, \tag{8}$$

so wird das Ergebnis unserer Untersuchung der Bewegung mittels der Kurve (x, y) nicht geändert, denn diese Kurve kann als die Projektion der Kurve der Ebene (8) in die Ebene xy aufgefasst werden. Demzufolge zieht beispielsweise die Verkleinerung des Bereiches der Kurve (x, y) die Verkleinerung des Bereiches der Kurve der Ebene (8) nach sich und umgekehrt.