Sur les divers procédés d'interpolation

Par

R. KAŠANIN

I

Définir une fonction $y=f(x)$ dans un intervalle (a, b) veut dire: donner pour chaque x de cet intervalle un y correspondant. Donc, pour que la fonction $f(x)$ soit définie dans cet intervalle, il est nécessaire d'avoir un ensemble de données ayant la puissance du continu. Lorsque nous connaissons quelques conditions générales pour $f(x)$, l'ensemble de données peut avoir une puissance inférieur. Ainsi, par ex., si nous savons que la fonction est continue, il faut connaître ses valeurs seulement pour les valeurs rationnelles de la variable indépendante x, ce qui représente un ensemble dénombrable de données; de même l'ensemble de données nécessaires est dénombrable, si nous savons que la fonction est analytique (nous connaissons les derivées de tous ordres en un point). Si nous savons que la fonction dépend de n paramètres, il suffit d'avoir un nombre fini de données, par ex. les valeurs de la fonction pour n valeurs différentes de la variable indépendante.

Considérons ce dernier cas: nous savons que la fonction dépend de n paramètres $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$, c.à.d. $y=f(x; A_0, A_1, \ldots A_{n-1})$, Alors nous aurons besoins de n équations au moyen desquelles nous pourrons déterminer les valeurs de ces n paramètres; par ex. si nous connaissons pour n valeurs x_i de l'argument x les valeurs correspondantes y_i de la fonction y, nous aurons n equations $y_i=f(x_i;\ A_0, A_1, \ldots A_{n-1})$, $i=0, 1 \ldots, n-1$. La solution de ce système d'équations sera plus ou moins facile à obtenir suivant le genre de la fonction des paramètres que nous aurons. Le cas le plus simple se présente lorsqu'on a un agrégat linéaire

$$y=f(x)=A_0\,\varphi_0\,(x)+A_1\,\varphi_1\,(x)\;+\cdots+\;A_{n-1}\,\varphi_{n-1}\,(x),$$

(les $\varphi_k(x)$ sont des fonctions complètement connues), puisque le système des équations $y_i=f(x_i)$ est linéaire par rapport aux paramètres. Nous appelerons l'ensemble des fonctions $\varphi_k(x)$ *base*. Toutes les fonctions, déterminées de cette manière à partir d'une base définie, font une classe appartenant à cette base; elles diffèrent entre elles par les valeurs des paramètres $A_0, \ldots A_{n-1}$. Pour que les paramètres soient entre eux indépendants, il faut que les fonctions formant la base soient entre eux linéairement indépendants.

Considérons d'abord les polynômes, formant la classe la plus élémentaire de fonctions. Une base constituée par des polynômes définit, par des combinaisons linéaires, une classe de polynômes dont le degré est au plus égal au plus haut degré des polynômes de la base considérée. Donc, tout polynôme de cette classe peut être représenté comme une combinaison linéaire des n polynômes de la base donnée à l'avance. Par conséquent, déterminer un polynôme $f(x)$ de degré au plus égal à $n-1$, ayant pour n valeurs de x, données d'avance, des valeurs y données également d'avance, signifie ceci:

1) choisir une base $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ de n polynômes linéairement indépendants, dans laquelle au moins un polynôme serait de degré $n-1$ et les autres des degrés non supérieurs;

2) résoudre le système des équations

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,\varphi_x\,(x_i)=y_i\,, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

par rapport aux paramètres A_k;

3) poser

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \varphi_k(x) .$$

Si les polynômes $\varphi_k(x)$, qui constituent la base, sont linéairement indépendants, le système (1) aura toujours une solution par rapport à A_k. Ceci résulte de ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots \varphi_{n-1}(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots \varphi_{n-1}(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_{n-1}) & \varphi_1(x_{n-1}) & \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$. Ce déterminant étant égal à zéro pour $x=x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, il ne peut pas l'être aussi pour $x=x_0$, car, dans ce cas, ce polynôme de degré $n-1$ aurait n racines distinctes, — à moins qu'il soit identiquement égal à zéro. Mais alors les polynômes ne seraient plus linéairement indépendants, ce qu'on voit en dévélopant le déterminant suivant les éléments de la première ligne.

Dans la détermination des polynômes $f(x)$ tout se réduit, donc, en principe, au choix de la base et à la résolution du système (1). En choisisssant des bases différentes, nous aurons des systèmes (1) plus ou moins faciles à résoudre. Si nous prenons, par ex., $\varphi_k(x) = x^k$ ou $\varphi_k(x)=(x-c)^k$, nous aurons la base la plus simple, mais le système (1) est difficile à résoudre. Par contre, le système (1) sera le plus facile à resoudre, lorsque sa première équation contient seulement A_0, la seconde seulement A_1, etc., la dernière seulement A_{n-1}. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi_k(x_i) \begin{cases} = 0 \text{ pour } i \neq k, \\ \neq 0 \text{ pour } i = k. \end{cases}$$

Si la base possède cette propriété, nous aurons simplement

$$A_k \varphi_k(x_k) = y_k , \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

d'où il est facile à trouver A_k, surtoût si l'on a, de plus, $\varphi_k(x_k)=1$. Les conditions

$$\varphi_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{pour } i \neq k, \\ = 1 & \text{pour } i = k, \end{cases}$$

nous enseignent que $\varphi_k(x)$ est le polynôme de Lagrange du degré $n-1$:

$$\varphi_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n-1})}.$$

Ainsi, la base est compliquée, mais le système (1) est le plus simple possible.

Entre ces deux cas extrêmes, la méthode de Newton occupe une place intermediaire. Ici la base est moins compliquée que celle de Lagrange, le système (1) plus simple que dans le premier cas considéré, mais il est plus compliqué que dans le cas de Lagrange. A la méthode de Newton nous arrivons par la considération suivante. Dans le cas général le système (1) est difficile à résoudre, puisque dans chaque équation figurent tous les paramètres. Avec la base de Lagrange il est trés simple, puisque dans chaque équation ne figure qu'un paramètre, ce qui cependant complique la base. Pour ne pas trop compliquer la base, nous diminuerons le nombre des conditions pour le système (1): nous poserons que la première équation dans (1) ne contient que A_0, la seconde que A_0 et A_1, la troisième que A_0, A_1 et A_2, etc., et la dernière tous les paramètres. La résolution du système (1) se fera alors progressivement c'est-à-dire: on déterminera de la première équation A_0; de la seconde, connaissant déjà A_0, on trouvera A_1, etc. Pour ceci il faut et il suffit que l'on ait:

$$\varphi_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{pour } i < k, \\ \neq 0 & \text{pour } i = k, \end{cases}$$

c. à d.

$$\varphi_k(x) = P_k(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}),$$

où $P_k(x)$ est un polynôme de degré $(n-1-k)$ au plus, mais tel que $P_k(x_k) \neq 0$. Le plus simple est donc de choisir $P_k(x) = 1$, de sorte que

$$\varphi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}),$$

c. à d. un polynôme de degré k. La base est par conséquent plus compliquée que x^k, mais plus simple que celle de Lagrange; le système (1) est cependant pour cette base plus simple que dans le cas de la base x^k, mais plus compliqué que dans le cas de la base de Lagrange.

Il en résulte que' en imposant quelques conditions au système (1), celui-ci nous déterminera partiellement la base. En choisissant arbitrairement la base, celle-ci nous déterminera la forme du système (1).

II

Lorsqu'on ne suppose rien sur la base, le système (1) se résoud par les méthodes habituelles. Le but final de toutes ces méthodes est de former, à la place du système (1), un nouveau système, avec le même nombre d'équations, mais tel que chaque équation possède une seule inconnue. On y arrive, par ex., à l'aide de la multiplication de toutes les équations par des cofacteurs convenables du déterminant du système.

Si nous multiplions les équations (1) respectivement par $\lambda_0^{(\nu)} \lambda_1^{(\nu)}, \ldots \lambda_{n-1}^{(\nu)}$ et faisons leur somme:

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left[\lambda_0^{(\nu)} \varphi_k(x_0) + \lambda_1^{(\nu)} \varphi_k(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1}^{(\nu)}(x_{n-1})\right] =$$
$$= \lambda_0^{(\nu)} y_0 + \lambda_1^{(\nu)} y_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(\nu)} y_{n-1},$$

nous obtenons pour $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ un nouveau système de n équations linéaires aux inconnues A_k à n^2 coéfficients indéterminées $\lambda_\mu^{(\nu)}$, dont nous pouvons disposer. Nous les choisirons de façon que nous ayons

$$(3) \quad \lambda_0^{(\nu)} \varphi_k(x_0) + \lambda_1^{(\nu)} \varphi_k(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1}^{(\nu)} \varphi_k(x_{k-1}) \begin{cases} = 0 \text{ pour } \nu \neq k, \\ \neq 0 \text{ pour } \nu = k. \end{cases}$$

Des n systèmes à n équations de cette forme les coéfficients $\lambda_\mu^{(\nu)}$ peuvent être déterminés pour tout μ et ν. Avec les coéfficients $\lambda_\mu^{(\nu)}$, le système (2) aura la forme:

$$A_k \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{(k)} \varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^{(k)} y_i,$$

d'où l'on déterminera facilement A_k pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Formons un polynôme $\psi_\nu(x)$ de degré au plus égal à $n-1$, ayant pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ les valeurs $\lambda_0^{(\nu)}, \lambda_1^{(\nu)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(\nu)}$. Alors les conditions (3) s'écrivent:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_k(x_i)\, \psi_\nu(x_i) \begin{cases} = 0 & \text{pour } \nu \neq k, \\ \neq 0 & \text{pour } \nu = k. \end{cases}$$

Posons, pour abréger

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_k(x_i)\, \psi_\nu(x_i) = [\varphi_k, \psi_\nu].$$

Alors le résultat, que nous venons d'obtenir, peut être énoncé comme il suit: Pour toute base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$, composée de n polynômes linéairement indépendants et de degrés $\leqq n-1$, existent des polynômes $\psi_0(x)\ \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ de degrés $\leqq n-1$ possédant la propriété suivante:

$$[\varphi_k, \psi_\nu] \begin{cases} = 0 & \text{pour } \nu \neq k, \\ \neq 0 & \text{pour } \nu = k; \end{cases}$$

grâce à l'introduction de ces polynômes, le système (1) est devenu équivalent au système

$$A_k [\varphi_k, \psi_k] = [f, \psi_k], \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

facilement résoluble par rapport à A_k. Nous dirons que les bases $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ et $\psi_0(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ sont *conjuguées*.

Voici à quoi servent les bases conjuguées. Pour une base donnée, la détermination de la base conjuguée ne dépend pas des y_i, mais seulement des valeurs de l'argument. Cependant le système (4) est simple comme dans le cas de la base de Lagrange.

Le cas le plus simple a lieu lorsque la base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_{n-1}(x)$ est conjuguée d'elle-même, c. à d. lorsque ces polynômes possèdent la propriété:

$$[\varphi_k, \varphi_\nu] \begin{cases} = 0 & \text{pour } \nu \neq k, \\ \neq 0 & \text{pour } \nu = k. \end{cases}$$

Démontrons ceci: Pour tout ensemble de valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ existe une base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$, composée de polynômes, conjuguée d'elle-même et de telle manière que $\varphi_k(x)$ soit un polynôme de degré k et $[\varphi_k, \varphi_k] = 1$. Nous appellerons une telle base *base de Legendre.*

Posons:

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_k(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_{k-1} \varphi_{k-1}(x) + c x^k$$

et essayons de déterminer $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ et c de façon que les conditions de la base de Legendre soient remplies. Pour $\varphi_0(x)$ la condition est déjà remplie, puisque $[\varphi_0, \varphi_0] = 1$. En multipliant successivement $\varphi_k(x)$ par $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$, en vertu des conditions imposées nous obtiendrons:

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 + c\,[\varphi_0, x^k], \\ 0 &= c_1 + c\,[\varphi_1, x^k], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= c_{k-1} + c\,[\varphi_{k-1}, x^k], \end{aligned}$$

c. à d.:

$$c_\nu = - c\,[\varphi_\nu, x^k], \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Par conséquent:

$$\varphi_k(x) = c \left\{ x^k - \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]\, \varphi_\nu(x) \right\},$$

d'où

$$\varphi_k^2(x) = c^2 \left\{ x^{2k} - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]\, \varphi_\nu(x)\, x^k + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\mu, x^k] \cdot [\varphi_\nu, x^k]\, \varphi_\mu(x)\, \varphi_\nu(x) \right\};$$

donc

$$[\varphi_k, \varphi_k] = c^2 \left\{ [x^k, x^k] - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\mu, x^k] \cdot [\varphi_\nu, x^k] \cdot [\varphi_\mu, \varphi_\nu] \right\}.$$

D'après les conditions qui déterminent la base de Legendre, nous aurons dans le troisième terme au seconde membre

$$[\varphi_\mu, \varphi_\nu] \begin{cases} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu, \\ = 1 \text{ pour } \mu = \nu; \end{cases}$$

en outre, il faut que $[\varphi_k, \varphi_k] = 1$.
Donc,

$$1 = c^2 \left\{ [x^k, x^k] - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]^2 + \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]^2 \right\}$$

et, par conséquent,

$$\left\{ [x^k, x^k] - \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]^2 \right\} c^2 = 1,$$

d'où l'on peut tirer c. Ainsi nous avons la formule récurrente

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$(5) \qquad \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{[x^k, x^k] - \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]^2}} \cdot \left\{ x^k - \sum_{\nu=0}^{k-1} [\varphi_\nu, x^k]\, \varphi_\nu(x) \right\}.$$

Cette formule détermine, d'abord, le polynôme $\varphi_0(x)$, qui satisfait aux conditions de la base de Legendre; le polynôme $\varphi_1(x)$ peut être déterminé de $\varphi_0(x)$, donc $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ satisfont aux mêmes conditions; $\varphi_2(x)$ peut être déterminé de

$\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$; donc $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ satisfont aussi aux mêmes conditions; et ainsi de suite jusqu'à $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$. On voit immédiatement de (5) que $\varphi_k(x)$ est un polynôme de degré k. Ces polynômes sont linéairement indépendants, puisque leurs degrés sont de nombres différents. — Ainsi notre affirmation est démontrée.

Il résulte de (4)

$$A_k = [f, \varphi_k]. \tag{6}$$

Plus haut nous avons mis en évidence l'intérêt que présentent les bases conjuguées. Celui de la base de Legendre est encore plus important; celle-ci dispense de calculer la base conjuguée.

Si nous rapprochons les quatre bases, à savoir la base x^k, et celles de Lagrange, de Newton et de Legendre — nous voyons ceci. La première est la plus simple, mais le calcul des coéfficients A_k est le plus compliqué. Avec la base de Lagrange le contraire a lieu: la base est la plus compliquée, mais la détermination des coefficients est la plus facile. Les bases de Newton et de Legendre prennent place entre les deux: elles sont plus compliquées que la base x^k, mais les coefficients A_k se calculent plus aisément; elles sont plus simples que la base de Lagrange, mais les coéfficients A_k se calculent plus difficilement. En comparant entre elles les bases de Newton et de Legendre, nous voyons que celle de Newton est plus simple, car ses éléments peuvent être écrits immédiatement, tandis que ceux de la base de Legendre doivent être calculés successivement. Cependant, le calcul des coéfficients de la base de Legendre se fait plus aisément, puisque, la base étant donnée, ils peuvent être calculés directement, ce qui n'est pas le cas pour la base de Newton. Les bases de Newton et de Legendre sont en quelque sorte opposées l'une à l'autre: la formation de la base dans un cas est semblable à la détermination des coéfficients dans l'autre.

D'après (5) on a

$$\varphi_1(x) = \frac{x - [\varphi_0, x]\,\varphi_0(x)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - [\varphi_0, x]^2}} = \frac{x - \frac{1}{n}\sum x_i}{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum x_i^2\right)^2}.$$

Le polynôme $\varphi_1(x)$ sera plus simple si $\frac{1}{n}\sum x_i=0$. Posons donc $\frac{1}{n}\sum x_i = a$ et effectuons la substitution $x = a + \xi$. Alors de $x_i = a+\xi_i$ il résulte $\frac{1}{n}\sum \xi_i = 0$. Pour cette raison formons la base de Legendre pour ξ, en supposant que $\frac{1}{n}\sum\xi_i=0$. Pour abréger, nous écrirons

$$(7) \qquad +\sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum \xi_i^k} = \sigma_k\,, \qquad \text{c. à d.} \quad \sigma_k^k = \frac{1}{n}\sum \xi_i^k\,;$$

alors $\sigma_1=0$. Par conséquent, si nous désignons les polynômes de la base de Legendre, l'argument étant ξ, par $L_k(\xi)$, nous aurons:

$$L_0(\xi)=1, \qquad L_1(\xi) = \frac{\xi}{\sigma_2}\,.$$

Ensuite, d'après (5), nous obtenons:

$$L_2(\xi)\,.\sqrt{[\xi^2,\xi^2]-[L_0,\xi^2]^2-[L_1,\xi^2]^2}=\xi^2-[L_0,\xi^2]\,L_0(\xi)-[L_1,\xi^2]\,.\,L_1(\xi)$$

c. à d.

$$L_2(\xi)\,.\sqrt{\sigma_4^4-\sigma_2^4-\left(\frac{\sigma_3^3}{\sigma_2}\right)^2} = \xi^2-\sigma_2^2-\frac{\sigma_3^3}{\sigma_2}\cdot\frac{\xi}{\sigma_2}\,,$$

d'où

$$L_2(\xi) = \frac{\left(\frac{\xi}{\sigma_2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3\cdot\left(\frac{\xi}{\sigma_2}\right)-1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6-1}}$$

Donc, si $\sigma_1=\frac{1}{n}\sum\xi_i = 0$, les trois premiers éléments de la base, de Legendre seront;

$$(8) \quad \begin{cases} L_0(\xi) = 1 \\ L_1(\xi) = \dfrac{\xi}{\sigma_2}\,, \\ L_2(\xi) = \dfrac{\left(\dfrac{\xi}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 \cdot \dfrac{\xi}{\sigma_2} - 1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4 - \left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6 - 1}}\,. \end{cases}$$

Le première coefficient est donc, d'après (6):

$$A_0 = [f, L_0] = \frac{1}{n} \sum y_i.$$

Le cas le plus simple se présente lorsque $\frac{1}{n} \sum y_i = 0$. Nous effectuerons donc de nouveau la transformation

$$y = b + \eta, \quad \text{où} \quad b = \frac{1}{n} \sum y_i\,.$$

Si nous prenons η comme variable dépendante et si nous posons

$$(9) \qquad + \sqrt[k]{\frac{1}{n} \sum \eta_i^k} = \tau_k, \qquad \text{c. à d.} \quad \tau_k^k = \frac{1}{n} \sum \eta_i^k;$$

$$(10) \qquad \frac{1}{n} \sum \xi_i \eta_i = s, \qquad \frac{1}{n} \sum \xi_i^2 \eta_i = \bar{s}\,;$$

$$(11) \qquad \frac{s}{\sigma_2 \tau_2} = r\,, \qquad \frac{\bar{s}}{\sigma_2^2\, \tau_2} = t\,;$$

nous aurons, d'après (6),

$$A_0 = 1;$$

$$A_1 = [\eta, L_1(\xi)] = \frac{s}{\sigma_2} = \tau_2 r\,;$$

$$A_2 = [\eta, L_2(\xi)] = \tau_2 \cdot \frac{t - \left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4 - \left(\dfrac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6 - 1}}\,.$$

Donc

$$\eta = \tau_2 r \cdot \frac{\xi}{\sigma_2} + \tau_2 \frac{t - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6 - 1}} \cdot \frac{\left(\frac{\xi}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 \cdot \frac{\xi}{\sigma_2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6 - 1}}$$

$$+ A_3 L_3(\xi) + \cdots + A_{n-1} L_{n-1}(\xi),$$

c. à d.

$$(12) \quad \frac{\eta}{\tau_2} = r \cdot \frac{\xi}{\sigma_2} + \frac{t - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r}{\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^4 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6 - 1} \cdot \left\{ \left(\frac{\xi}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 \cdot \frac{\xi}{\sigma_2} - 1 \right\} + \cdots$$

Pour avoir y comme un polynôme en x, il suffit de poser dans (12) $x-a$ au lieu de ξ, et $y-b$ au lieu du η.

III

Soit $f(x)$ un polynôme de degré $n-1$, ordonné suivant une certaine base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$:

$$f(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x).$$

Nous appellerons *segment* du polynôme $f(x)$ pour une base donnée toute somme

$$f_m(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_m \varphi_m(x)$$

des $m+1$ premiers termes de $f(x)$. La différence $R_{m+1}(x) = f(x) - f_m(x)$ sera appelée *reste* pout la base donnée. De ces définitions on a:

$$f(x) = f_m(x) + R_{m+1}(x);$$

$$f_{n-1}(x) = f(x), \qquad R_n(x) = 0;$$

$$R_{m+1}(x) = A_{m+1} \varphi_{m+1}(x) + \cdots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x).$$

Prenons, au lieu du polynôme $f(x)$, une fonction quelconque $F(x)$ et supposons connues, pour les n valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de l'argument x, les valeurs correspondantes $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ de $y = F(x)$. Alors nous pouvons former un polynôme $f(x)$, de degré $(n-1)$ au plus, ayant la propriété $f(x_i) = F(x_i)$. En général, ce polynôme ne sera pas identique à $F(x)$, sauf lorsque $F(x)$ est lui-même un polynôme de degré $(n-1)$. Nous appellerons les segments de $f(x)$, c'est-à-dire $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ ordonnés suivant une certaine base $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}(x)$ *segments de la fonction* $F(x)$ pour cette base. La différence $F(x) - f_m(x)$ sera appellée *reste*, pour la même base. Les notions de segment et de reste sont ainsi généralisées pour une fonction quelconque. Si $F(x)$ n'est pas un polynôme de degré $(n-1)$, on n'aura pas $f_{n-1}(x) = F(x)$ et $R_n(x) = 0$, mais au contraire $f_{n-1}(x) = f(x) \neq F(x)$ et $R_n(x) = F(x) - f(x) \neq 0$.

En résumant nous pouvons dire:

Soit $F(x)$ une fonction quelconque définie dans l'intervalle (α, β): supposons que, pour n valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. de l'argument x, situées dans cet intervalle, nous connaissions les valeurs correspondantes $y_i = F(x_i)$ de la fonction. Soit en outre $f(x)$ le polynôme d'ordre $\leqq n-1$ ayant pour $x = x_i$ la valeur $f(x_i) = y_i$; ce polynôme est unique et supposons le ordonné suivant une certaine base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$, soit

$$f(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{n-1} \varphi_{n-1}(x).$$

Les polynômes

$$f_m(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_m \varphi_m(x)$$

seront nommés *segment* de la fonction $F(x)$ pour la base considérée, et les différences $R_{m+1}(x) = f(x) - f_m(x)$ *restes* de ces segments. Entre $F(x)$, $f_m(x)$ u $R_{m+1}(x)$ il existe donc la relation:

$$F(x) = f_m(x) + R_{m+1}(x).$$

Si $F(x)$ est un polynôme de degré $\leqq n-1$, on aura $f_{n-1}(x) = F(x)$ et $R_n(x) = 0$; mais si $F(x)$ est un polynôme de degré

$>n-1$, ou si ce n'est pas un polynôme, alors ce ne sera plus cas, et $f_{n-1} = f(x) \neq F(x)$ et $R_n(x) = F(x) - f(x) \neq 0$.

Quelle est la relation entre le segment $f_m(x)$ et la fonction $F(x)$? Pour répondre à cette question, c. à d. pour trouver la relation, il faut connaître la base que nous avons choisie; sans cela il est impossible de donner de réponse, sauf pour $m = n-1$, la base étant indifférente dans ce cas. Aussi, nous donnerons pour chaque base que nous avons envisagée jusqu'ici une réponse particulière.

Considérons d'abord $\varphi_k(x) = x^k$. Alors

$$f_m(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m.$$

La parabole d'ordre $n-1$,

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1},$$

a avec la courbe $y = F(x)$ n points communs, à savoir (x_0, y_0) $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ et la parabole $y = f_m(x)$ est au point $(0, f(0))$ en osculation d'ordre m avec la parabole $y = f(x)$. Si nous prenons $\varphi_k(x) = (x-c)^k$, la même chose a lieu au point $(c, f(c))$. Par conséquent, nous pouvons dire: Si $f_m(x)$ est un segment de $F(x)$ pour la base $(x-c)^k$, la parabole $y = f_m(x)$ est en osculation d'ordre m avec la parabole $y = f(x)$ au point $(c, f(c))$. Donc, prendre la courbe $y = f(x)$ au lieu de la courbe $y = F(x)$, cela revient à prendre une parabole d'ordre $\leqq n-1$, qui a n points communs avec la courbe donnée; prendre le segment $f_m(x)$ revient à prendre, au lieu de la parabole $y = f(x)$, la parabole $y = f_m(x)$ d'ordre $\leqq m$, qui est au point $(c, f(c))$ en osculation d'ordre m avec la parabole $y = f(x)$. L'osculation est d'un ordre d'autant plus élevé qne m est plus grand.

Considérons la base de Lagrange:

$$\varphi_k(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n-1})}.$$

Alors $A_0 = y_0$, $A_1 = y_1, \ldots, A_{n-1} = y_{n-1}$. Le segment $f_0(x) = A_0 \varphi_0(x)$ et un polynôme d'ordre $n-1$, qui a pour $x = x_0$ la valeur y_0, et pour $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}$ la valeur zéro. Du point de vue géométrique, $y=f_0(x)$ est une parabole d'ordre $n-1$, qui passe par le point (x_0, y_0) sans passer par les points (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_{n-1}, y_{n-1})$. Le segment $f_1(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x)$ est aussi un polynôme de degré $n-1$ qui a pour $x=x_0$ la valeur y_0, pour $x=x_1$ la valeur y_1, et pour $x=x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ la valeur zéro. Du point de vue géométrique, $y=f_1(x)$ est une parabole d'ordre $n-1$ qui passe par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) et non par les points $(x_2, y_2) \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. Etc. La parabole $y=f_m(x)$ a un nombre d'autant plus grand de points communs avec $y=F(x)$ que m plus grand.

Considérons la base de Newton:

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{k-1}).$$

$f_m(x)$ est alors un polynôme de degré m qui prend, pour $x=x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, les valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, ne prenant pas en général, pour $x=x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}$, les valeurs $y_m, y_{m+1}, \ldots \ldots, y_{n-1}$. Du point de vue géométrique, $y = f_m(x)$ est une parabole d'ordre m, qui passe par les points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1})$ mais non par les points $(x_m, y_m), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$. P. ex., $y = f_1(x)$ est une droite passant par les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), et $y=f_2(x)$ est une parabole du second ordre, passant par les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Plus m augmente, plus $f_m(x)$ devient compliqué (son ordre augmente) et $y = f_m(x)$ a un nombre d'autant plus grand de points communs avec $y=F(x)$.

Considérons, enfin, la base de Legendre:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_k(x) = L_k(\xi).$$

$f_m(x)$ est alors un polynôme du degré m. Du point de vue géométrique $y=f_m(x)$ est une parabole d'ordre m. Mais, l'on ne voit pas immédiatement quelle est la relation entre le polynôme $f_m(x)$ et la fonction $F(x)$, c. à d. entre la parabole $y = f_m(x)$ d'ordre m et la courbe $y = F(x)$. On ne voit que ceci: non seulemnnt qu'on n'a pas $f_m(x)=F(x)$ pour chaque x (ce qui n'a lieu ni dans le trois cas précédents), on n'a pas même $f_m(x_i)=F(x_i)$ pour certains x_i (ce qui a lieu pour les bases de Newton et Lagrange), ni d' osculation entre $f_m(x)$ et $f(x)$ (ce qui à lieu pour la base x^k). Géométriquement, si $f_m(x)$ est un segment pour la base de Legendre, les courbes $y=f_m(x)$ et $y=F(x)$ n'ont en général aucun point de commun, ni les courbes $y=f_m(x)$ et $y=f(x)$ d'osculation, ni les courbes $y=f_m(x)$ et $y=f(x)$ de points communs, excepté lorsque $F(x)$ est un polynôme de degré $\leqq n-1$ et $m=n-1$, c. à d. lorsque $F(x)$, $f(x)$ et $f_m(x)$ sont des polynômes identiques. La question du rapport entre $F(x)$ et $f_m(x)$ pour la base de Legendre reste, donc, encore ouverte.

La relation entre la fonction $F(x)$ et le segment $f_m(x)$ peut être énoncée aussi de la manière suivante: Pour la base $(x-c)^k$, la différence $F(x_i)-f(x_i)$ est nulle pour tout i, et $y=f_m(x)$ a au point $(c, f(c))$ une osculation d'ordre m avec $y=f(x)$; pour la base de Lagrange la différence $F(x_i)-f_m(x_i)$ est nulle pour $i=0, 1, \ldots, m$; pour la base de Newton la différence $F(x_i)-f_m(x_i)$ est nulle pour $i=0, 1, \ldots, m$. Dans le premier cas $f_m(x)$ est un polynôme d'ordre m, dans le second cas $f_m(x)$ est un polynôme d'ordre $n-1$, dans le troisième cas $f_m(x)$ est un polynôme d'ordre m. Dans chacun de ces trois cas le polynôme $f_m(x)$ est différent; seulement pour $m=n-1$ nous avons dans les trois cas le même polynôme. Plus m augmente, plus il y a de commun entre $f_m(x)$ et $F(x)$: dans le second et troisième cas ce sont les points communs, dans le premier cas c'est l'ordre du contact.

Pour la base de Legendre $f_m(x)$ est un polynôme de degré m. Soit $p_m(x)$ un polynôme quelconque de degré m; on peut l'ordonner toujours suivant la base de Legendre, suivant laquelle est ordonné le polynôme $f(x)$:

$$p_m(x)=B_0\,\varphi_0(x)+B_1\,\varphi_1(x)+\cdots+B_m\varphi_m(x),$$

où $\varphi_k(x)$ sont de polynômes du degré k, satisfaisant les conditions déjà données pour une base de Legendre. En changeant les coefficients B_k, nous obtiendrons tous les polynômes $p_m(x)$ possibles de degré $\leqq m$; parmis ceux-ci figurera le segment $f_m(x)$. Pour $x=x_i$ la fonction $F(x)$ aura la valeur $y_i=F(x_i)$ et le polynôme $p_m(x)$ aura la valeur $p_m(x_i)$. La différence entre ces valeurs est $F(x_i)-p_m(x_i)$. Formons la somme des carrés de ces différences:

$$\Phi=\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_i)-p_m(x_i)]^2.$$

Lorsque toutes les valeurs x_i et y_i sont données et la base de Legendre calculée, Φ aura pour ces mêmes valeurs des valeurs différentes, selon les valeurs que nous avons données aux coéfficients $B_0, B_1, \ldots, B_m$, En d'autres termes, x_i et y_i étant donnés, Φ est une fonction de $B_0, B_1, \ldots, B_m$. En outre, on a $\Phi \geqq 0$. Par conséquent Φ comme fonction de $B_0, B_1, \ldots, B_m$ a un minimum, qui n'est pas négatif, c. à d. parmi les polynômes de degré m il en existe un pour lequel Φ a cette valeur minima. La condition nécessaire pour cela est:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_0} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial B_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial B_m} = 0.$$

Cependant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial B_k} &= \sum_{i=0}^{n-1} 2 \,.\, [F(x_i) - p_m(x_i)] \cdot - \frac{\partial p_m(x_i)}{\partial B_k} \\ &= -2 \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_i) - p_m(x_i)] \cdot \varphi_k(x_i) \\ &= -2 \left[\sum_{i=0}^{n-1} y_i \, \varphi_k(x_i) - B_0 \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_0(x_i) \, \varphi_k(x_i) - \cdots - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - B_m \sum_{i=}^{n-1} \varphi_m(x_i) \, \varphi_k(x_i) \right]; \end{aligned}$$

donc, d'après les propriétés de la base de Legendre,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_k} = -2 \left[\sum_{i=0}^{n-1} y_i \, \varphi_k(x_i) - n B_k \right].$$

Par conséquent, les conditions déterminant le minimun de Φ sont

$$B_k = [y_i, \varphi_k], \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Il en résulte que Φ ne peut avoir qu'une seule valeur extrêma. Comme d'autre part nous avons déjà constaté que Φ a nécessairement un minimum, celui-ci est atteint pour $B_k = [y_i, \varphi_k]$, c à d. pour $p_m(x) = f_m(x)$, où $f_m(x)$ est un segment pour la base de Legendre. Ainsi, nous avons trouvé la relation entre $F(x)$ et les segments $f_m(x)$ pour la base de Legendre, à savoir: parmi tous les polynômes $p_m(x)$ possibles, de degré m, le segment $f_m(x)$ pour la base de Legendre est celui qui rend la somme $\sum_{i=0}^{n-1}[F(x_i)-p_m(x_i)]^2$ minimum.

Cherchons, par ex., le polynôme du second degré, qui rende la somme Φ minimum, mais supposons que nous ayons déjà effectué la substitution des variables $x=a+\xi$, $y=b+\eta$ c. à d. que $\Sigma\,\xi_i=0$, $\Sigma\,\eta_i=0$. Alors il faut déterminer B_o, B_1, B_2 de telle sorte, que

$$\Phi=\sum_{i=0}^{n-1}[\eta_i-(B_o+B_1\xi_i+B_2\xi_i^2)]^2$$

soit un minimum. Ceci donne

$$\frac{\partial\Phi}{\partial B_o}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial B_1}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial B_2}=0,$$

c. à d.

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\eta_i-(B_o+B_1\xi_i+B_2\xi_i^2)]=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\eta_i-(B_o+B_1\xi_i+B_2\xi_i^2)]\,\xi_i=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\eta_i-(B_o+B_1\xi_i+B_2\xi_i^2)]\,\xi_i^2=0;$$

ou, en nous servant des signes introduits,

$$\begin{aligned}\tau_1-(B_o+B_1\sigma_1+B_2\sigma_2^2)&=0,\\ s-(B_o\sigma_1+B_1\sigma_2^2+B_2\sigma_3^3)&=0,\\ \bar{s}-(B_o\sigma_2^2+B_1\sigma_3^3+B_2\sigma_4^4)&=0.\end{aligned}$$

Puisque $\sigma_1=0$, $\tau_1=0$, nous aurons:

$$\begin{aligned}1\cdot B_o+0\ \cdot B_1+\sigma_2^2\cdot B_2&=0,\\ 0\cdot B_o+\sigma_2^2\cdot B_1+\sigma_3^3\cdot B_2&=s,\\ \sigma_2^2\cdot B_o+\sigma_3^3\cdot B_1+\sigma_4^4\cdot B_2&=\bar{s}.\end{aligned}$$

Le reste du calcul étant élémentaire, nous donnons les résultats

$$\left[\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6-1\right]\cdot B_o=\left[\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r-t\right]\cdot\tau_2\,,$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6-1\right]\cdot B_1=\left[\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6-1\right]r\cdot\frac{\tau_2}{\sigma_2}+$$
$$+\left[\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r-t\right]\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3\cdot\frac{\tau_2}{\sigma_2}\,,$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_4}{\sigma_2}\right)^4-\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^6-1\right]\cdot B_2=-\left[\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^3 r-t\right]\cdot\frac{\tau_2}{\sigma_2^{\,2}}\,.$$

Si l'on introduit dans le polynôme $B_o+B_1\xi+B_2\xi^2$ les valeurs de B_o, B_1 et B_2 ainsi obtenues, on voit facilement qu'on a le résultat conforme à (12).

Ainsi, nous avons trouvé la relation entre la fonction $F(x)$ et son segment $f_m(x)$ dans les quatre cas considérés. Il y a d'autant plus d'éléments communs entre $F(x)$ et $f_m(x)$ dans l'intervalle (L), où se trouvent les valeurs $x_o, x_1, \ldots, x_{n-1}$, de l'argument x, que m est plus grand. Nous pouvons de deux manières augmenter le degré de communautés: soit en laissant constant le nombre n des valeurs données de l'argument et en diminuant l'intervalle (L) où elles sont situées, jusqu'à ce qu'il se réduise à un point; ou bien, en laissant constant l'intervalle (L) et en augmentant le nombre n des valeurs données de l'argument de sorte que celles-ci remplissent tout l'intervalle (L) d'une manière dense. La première opération peut être effectuée avec la base de Newton, la seconde avec celle de Legendre. Pour la première nous obtenons la formule de Taylor, pour la deuxième, en considérant l'intervalle $(-1, +1)$, nous obtenons le dévelloppement connu suivant les polynômes de Legendre. Mais nous n'insisterons plus là-dessus.

IV

Dans le système orthogonal de coordonnées Oxy le segment $f_m(x)$ de la fonction $F(x)$ sera représenté par la courbe $y=f_m(x)$ attachée à la courbe $y=F(x)$. Comme $f_m(x)$ est un polynôme en x, la courbe $y=f_m(x)$ sera une parabole d'un certain ordre. Par une transformation des coordonnées nous obtiendrons une autre parabole, excepté, peut-être, dans le cas d'une parabole du premier ordre, c. à d. d'une ligne droite. D'après celà, la courbe $y=f_m(x)$ par rapport à la courbe $y=F(x)$ ne possède aucune propriété géométrique essentielle, sauf, peut-être, lorsque $y=f_m(x)$ est une droite. Avec la base de Lagrange, le segment $y=f_0(x)$ fournit immédiatement une parabole d'ordre $n-1$; par conséquent, ici les segments ne donnent rien d'essentiel du point de vue géométrique. Avec la base de Newton le segment $f_0(x)$ donne le point (x_0, y_0), c. à. d. quelque chose d'essentiel; le segment $f_1(x)$ fournit la sécante par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1), c. à d. quelque chose d'essentiel, ce qui est invariant par rapport aux transformations des coordonnées; le segment $y=f_2(x)$ donne une parabole du second ordre, dont l'axe est parallel à l'axe des y, donc quelque chose qui n'est géométriquement pas du tout essentiel; en général, avec la base de Newton le segment $f_m(x)$, pour $m \geqq 2$, ne présente rien de géométriquement essentiel. Analysons ces circonstances pour la base de Legendre.

Le premier segment $f_0(x)$ pour la base de Legendre fournit le point aux coordonnées $a=\frac{1}{n}\sum x_i$ et $b=\frac{1}{n}\sum y_i$.

Si nous effectuons la transformation

$$x=\alpha+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi\,,$$
$$y=\beta+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi\,,$$

nous aurons:

$$\frac{1}{n}\sum x_i=\alpha+\left(\frac{1}{n}\sum x_i'\right)\cos\varphi-\left(\frac{1}{n}\sum y_i'\right)\sin\varphi\,,$$
$$\frac{1}{n}\sum y_i=\beta+\left(\frac{1}{n}\sum x_i'\right)\sin\varphi+\left(\frac{1}{n}\sum y_i'\right)\cos\varphi\,,$$

c. à d.

$$a=\alpha+a'\cos\varphi-b'\sin\varphi\,,$$
$$b=\beta+a'\sin\varphi+b'\cos\varphi\,.$$

D'autre part, le point (a, b) se transformera en $(\bar{a}, \bar{b})$:

$$a = \alpha + \bar{a}\cos\varphi - \bar{b}\sin\varphi\,,$$

$$b = \beta + \bar{a}\sin\varphi + \bar{b}\cos\varphi\,,$$

de sorte que l'on a $a' = \bar{a}$, $b' = \bar{b}$. Donc, le point (a, b) est essentiel du point de vue géométrique, ne dépendant pas du système des coordonnées. Il est facile à voir que ceci est vrai non seulement lorsque les systèmes Oxy et $O'x'y'$ sont congruents, comme dans le cas précédent, mais aussi lorsqu'ils sont symétriques.

Le second segment, $f_1(x)$, pour la base de Legendre donne une droite passant par le point (a, b); son équation dans le système de coordonnées Oxy s'écrit:

$$\frac{y-b}{\tau_2} = r\,\frac{x-a}{\sigma_2}\,,$$

et dans le système Sab, provenant d'une translation de l'origine au point $S(a, b)$:

$$\frac{\eta}{\tau_2} = r\,\frac{\xi}{\sigma_2}\,.$$

Pour examiner si cette droite est un élément essentiel en Géométrie ou non, il faut voir d'abord ce que deviendront σ_2, τ_2 et r à la suite de cette transformation des coordonnées.

En effectuant la translation

$$x = \alpha + x', \qquad y = \beta + y',$$

il arrive

$$x_i = \alpha + x_i', \qquad y_i = \beta + y_i'\,;$$

donc

$$\frac{1}{n}\Sigma x_i = \alpha + \frac{1}{n}\Sigma x_i', \qquad \frac{1}{n}\Sigma y_i = \beta + \frac{1}{n}\Sigma y_i';$$

c. à d.

$$a = \alpha + a', \qquad b = \beta + b'.$$

Par conséquent

$$\xi_i = x_i - a = (\alpha + x_i') - (\alpha + a') = x_i' - a' = \xi_i'\,,$$

$$\eta_i = y_i - b = (\beta + y_i') - (\beta + b') = y_i' - b' = \eta_i'\,,$$

d'où l'on voit que ξ_i et η_i ne changent pas à la suite d'une translation; la même chose a lieu pour σ_2, τ_2 et r, et en général pour toute fonction de ξ_i et η_i.

Par la rotation

$$\xi' = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi,$$
$$\eta' = -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi,$$

on obtient:

$$\xi'^2 = \xi^2 \cos^2 \varphi + 2\xi\eta \sin \varphi \cos \varphi + \eta^2 \sin^2 \varphi ,$$
$$\eta'^2 = \xi^2 \sin^2 \varphi - 2\xi\eta \sin \varphi \cos \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi ,$$
$$\xi'\eta' = -\xi^2 \sin \varphi \cos \varphi + \xi\eta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \eta^2 \sin \varphi \cos \varphi ;$$

par conséquent:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_2'^2 &= \sigma_2^2 \cos^2 \varphi + 2s \sin \varphi \cos \varphi + \tau_2^2 \sin^2 \varphi , \\ \tau_2'^2 &= \sigma_2^2 \sin^2 \varphi - 2s \sin \varphi \cos \varphi + \tau_2^2 \cos^2 \varphi , \\ s' &= -\sigma_2^2 \sin \varphi \cos \varphi + s (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \tau_2^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right.$$

On voit de suite que σ_2, τ_2, s et r ne sont pas invariants par rapport à la rotation, puisqu' ils dépendent de φ. Cependant on obtient de (13) deux équations, et généralement exactement deux indépendantes de φ:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_2'^2 + \tau_2'^2 &= \sigma_2^2 + \tau_2^2 \\ \sigma_2'^2 \tau_2'^2 - s'^2 &= \sigma_2^2 \tau_2^2 - s^2 \end{aligned} \right.$$

et nous avons ainsi en général exactement deux invariants indépendants, fonctions de σ_2, τ_2, et s:

$$\sigma_2^2 + \tau_2^2 \quad \text{et} \quad \sigma_2^2 \tau_2^2 - s^2 ;$$

cependant σ_2, τ_2 et s n'ont pas en général une signification indépendante du système des coordonnées.

Mais l'on peut se demander, s'il y a des cas spéciaux où σ_2^2, τ_2^2 et s ne dépendent pas du système des coordonnées, c. à d. s'il peut arriver que l'on ait $\sigma_2'^2 = \sigma_2^2$; $\tau_2'^2 = \tau_2^2$, $s' = s$

pour chaque φ. Dans tels cas les équations (13) s'écrivent

$$(\tau_2^2 - \sigma_2^2)\sin^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$(\sigma_2^2 - \tau_2^2)\sin^2\varphi - 2s\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$(\tau_2^2 - \sigma_2^2)\sin\varphi\cos\varphi - 2s\sin^2\varphi = 0,$$

φ étant quelconque. Il s'ensuit $\tau_2^2 = \sigma_2^2$ et $s = 0$. — Donc on peut dire en définitive: σ_2, τ_2 et s sont invariants par rapport aux translations, mais par rapport aux rotations généralement non; ils le sont seulement quand $\tau_2 = \sigma_2$, $s = 0$. En général par rapport aux rotations nous avons deux invariants indépendants: $\sigma_2^2 + \tau_2^2$ et $\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2$.

Passons maintenant à la grandeur r qui ce compose des trois grandeurs précédentes. La relation connue de Lagrange

$$\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}\eta_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\,\eta_i\right)^2 = \sum_{j<i}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(\xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i)^2$$

fournit immédiatement $\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2 \geqq 0$, c. à d.

$$(15) \qquad 0 \leqq r^2 \leqq 1, \quad \text{c. à d.} \quad -1 \leqq r \leqq +1.$$

On aura $r^2 = 1$ seulement lorsque le deuxième membre de l'équation précédente est égal à zéro, c. à d. si $\frac{\eta_i}{\xi_i} = \frac{\eta_j}{\xi_j}$, pour chaque i et j. Dans ce cas tous les points (ξ_i, η_i) se trouvent sur une même droite.

On obtient de

$$r'^2 = \frac{s'^2}{\sigma_2'^2\,\tau_2'^2},$$

au moyen de (14),

$$r'^2 = \frac{\sigma_2'^2\,\tau_2'^2 - (\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2)}{\sigma_2'^2\,\tau_2'^2}$$

c. à d.

$$(16) \qquad r'^2 = 1 - \frac{\sigma_2^2\,\tau_2^2 - s^2}{\sigma_2'^2\,\tau_2'^2}.$$

Comme, d'après (13), $\sigma_2'^2 \tau_2'^2$ dépend en général de φ, la même chose a lieu pour r'^2, c. à d. r^2 n'est pas invariant par rapport aux rotations. Ici encore, on peut se demander s'il y a des cas particuliers lorsque $r'=r$ pour chaque φ. D'après (16), cela arrive lorsque ou bien $\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2 = 0$, ou bien $\sigma_2'^2 \tau_2'^2$ ne dépend pas de φ. Le premier cas signifie que $r^2=1$, c. à d. que tous les points (ξ_i, η_i) se trouvent sur une même droite; dans le deuxième, en vertu de (14), on a $s'=s$, ce qui entraîne les conditions connues $\sigma_2^2 = \tau_2^2$, $s=0$. — En définitive nous pouvons, donc, dire: r est invariant par rapport à la translation, et non par rapport à la rotation; par rapport à la rotation r n'est invariant que dans deux cas: d'abord lorsque $r^2=1$ c. à d. lorsque tous les points $(\xi_i \eta_i)$ se trouvent sur une même droite; et lorsque $\tau_2^2 = \sigma_2^2$ et $s=0$, — alors $r' = r = 0$.

Lorsque $r^2=1$, les grandeurs σ_2, τ_2 et s ne sont pas des invariants; lorsque σ_2^2, τ_2^2 et s sont des invariants, c. à d. lorsque $\tau_2^2 = \sigma_2^2$ et $s=0$, r l'est aussi et a pour valeur zéro; lorsque $r=0$ il n'est pas nécessairement $r'=0$ et σ_2, τ_2 et s ne sont pas toujours des invariants. Nous avons donc les deux cas particuliers suivants: 1° $\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2 = 0$; 2° $\sigma_2 = \tau_2$, $s=0$. Dans le premier cas, les points (x_i, y_i) se trouvent sur une droite et dans tout système de coordonnées on a $r^2=1$; dans le deuxième cas on a $r=0$ pour tout système de coordonnées. La condition $r=0$ à elle seule dans un système de coordonnées n'est pas essentielle, car, après une rotation, elle ne reste plus remplie.

D'après (16) on voit que r'^2 et $\sigma_2'^2 \tau_2'^2$ ont les maximums communs. Puisque $\sigma_2'^2 + \tau_2'^2 = \sigma_2^2 + \tau_2^2$, cela revient à trouver le maximum du produit de deux grandeurs dont on connaît la somme. Ceci aura lieu lorsque

$$\sigma_2'^2 = \tau_2'^2 = \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \tau_2^2)$$

Donc, d'après (16), nous aurons pour la maximum de r'^2:

$$r'^2 = 1 - \frac{4(\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2)}{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2} \cdot$$

Pour obtenir ce maximum il faut imprimer au système de coordonnées une rotation d'angle φ que l'on obtient des deux premières équations (13) et de la condition $\sigma_2'^2 = \tau_2'^2$:

$$\sigma_2^2 \cos^2 \varphi + 2s \sin \varphi \cos \varphi + \tau_2^2 \sin^2 \varphi =$$
$$= \sigma_2^2 \sin^2 \varphi - 2s \sin \varphi \cos \varphi + \tau_2^2 \cos^2 \varphi ,$$

d'où:

$$(17) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\tau_2^2 - \sigma_2^2}{2s} .$$

L'expression pour r'^2 maximum montre que c'est un invariant ce qui était à priori évident.

En chosissant convenablement φ, on peut obtenir $r' = 0$. Pour cela il est nécessaire et suffisant que $s' = 0$, c. à d. d'après (13), qu'on ait

$$(18) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{\sigma_2^2 - \tau_2^2} .$$

Il résulte de (17) et (18) que le système des coordonnées, dans lequel r'^2 est maximum, provient de celui dans lequel $r' = 0$ par une rotation de $\pm \frac{\pi}{4}$.

Cette discussion nous montre que: 1° $-1 \leq r \leq +1$; 2° si $r^2 = 1$, les points (x_i, y_i) se trouvent sur une même droite; 3° si $r^2 < 1$, il existe un système de coordonnées dans lequel r^2 a une valeur maximum R^2 et un système dans lequel $r = 0$ 4° il existe des systèmes de coordonnées dans lesquels r^2 a une valeur donnée à l'avance, plus petite que sa valeur maximum R^2. — Par conséquent r n'est pas un élément géométrique essentiel; l'élément géométrique est

$$(19) \qquad R^2 = 1 - 4 \cdot \frac{\sigma_2^2 \tau_2^2 - s^2}{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2} .$$

Après avoir ainsi étudié la grandeur r, passons à l'étude de la droite

$$\frac{\eta}{\tau_2} = r \frac{\xi}{\sigma_2} .$$

Elle aura dans le système des coordonnées $S\xi'\eta'$, provenant du système $S\eta\xi$ par une rotation d'angle φ, pour équation

$$\frac{\xi' \sin\varphi + \eta' \cos\varphi}{\tau_2} = r\,\frac{\xi' \cos\varphi - \eta' \sin\varphi}{\sigma_2},$$

ou, en résolvant par rapport à η',

$$(20) \qquad \eta' = \frac{s\cos\varphi - \sigma_2^2 \sin\varphi}{\sigma_2^2\cos\varphi + s\sin\varphi} \cdot \xi' .$$

Si on avait, cependant, effectué les calculs dès le début dans le système $S\xi'\eta'$, nous aurions obtenu dans ce système la droite

$$(21) \qquad \frac{\eta'}{\tau_2'} = r' \cdot \frac{\xi'}{\sigma_2'}, \quad \text{c. à d.} \quad \eta' = \frac{s'}{\sigma_2'^2}\,\xi'.$$

Notre tâche est donc de voir, si les droites (20) et (21) sont identiques ou non?

Pour qu'elles le soient, il faut et il suffit que

$$\frac{s\cos\varphi - \sigma_2^2\sin\varphi}{\sigma_2^2\cos\varphi + s\sin\varphi} = \frac{s'}{\sigma_2'^2}$$

pour tout φ. Cette condition peut s'écrire aussi de la manière suivante:

$$(s'\sigma_2^2 - s\,\sigma_2'^2)\cos\varphi + (\sigma_2'^2\sigma_2^2 + s s')\sin\varphi = 0.$$

Il en résulte, au moyen de (13),

$$(\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2)\sin\varphi = 0.$$

Pour que cette condition ait lieu pour chaque φ, il faut et il suffit que $\sigma_2^2\tau_2^2 - s^2 = 0$ c. à d. que les points soient situés sur une même droite. Donc, la droite

$$(22) \qquad \frac{y-b}{\tau_2} = r\,\frac{x-a}{\sigma_2}$$

n'est pas un élément géométrique essentiel, sauf lorsque les points (x_i, y_i) sont situés déjà sur la même droite.

Le nombre r est connu sous le nom de *coefficient de corrélation*. Nous croyons que le considérations précédentes ont contribué à éclaircir sa signification, ainsi que la signification de la droite (22). Si nous considérons y comme variable indépendante et x comme variable dépendante, c. à d. si nous envisageons la transformation $x = y'$, $y = x'$, r ne sera pas invariant, sauf pour $r^2 = 1$, et la droite (22) ne sera pas covariante, mais nous obtiendrons deux droites différentes (droites de régression).

Les considérations précédentes montrent que l'étude de la base de Legendre mène aux invariants formés de $\frac{1}{n}\Sigma x_i$, $\frac{1}{n}\Sigma y_i$, $\frac{1}{n}\Sigma x_i^2$, $\frac{1}{n}\Sigma x_i y_i$, $\frac{1}{n}\Sigma y_i^2$, mais non pas aux covariants, car le segment pour la base de Legendre où ces grandeurs figurent, c. à d. la droite (22), n'est pas covariant. Reste encore à savoir s'il est possible de former au moyen de ces grandeurs un covariant, se prêtant facilement à l'étude, et dans quel rapport sont les droites (22) dans des systèmes de coordonnées différents.