Ueber die Zerteilung der Ebene durch ein einfaches Polygon

Von

W. DAVATZ

1. Der Satz über einfaches Polygon

In „Grundlagen der Geometrie" spricht Hilbert folgenden Satz aus:

„Ein jedes einfache, in einer Ebene α gelegene Polygon trennt diejenigen Punkte der Ebene α, die nicht dem Streckenzuge des Polygons angehören, in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Äusseres, von folgender Beschaffenheit: ist A ein Punkt des Inneren (innerer Punkt) und B ein Punkt des Äusseren (äusserer Punkt) so hat jeder in α verlaufende Streckenzug, der A mit B verbindet, mindestens einen Punkt mit dem Polygon gemein; sind dagegen A, A' zwei Punkte des Inneren und B, B' zwei Punkte des Äusseren, so gibt es stets Streckenzüge in α, die A mit A' und B mit B' verbinden und keinen Punkt mit dem Polygon gemein haben. Bei geeigneter Bezeichnung der beiden Gebiete gibt es stets Geraden in α, die ganz im Äusseren des Polygons verlaufen, dagegen keine solche Gerade, die ganz im Innern des Polygons verläuft".*)

Diesen Satz gibt Hilbert ohne Beweis, zwar mit der Bemerkung, dass man zu ihm „ohne erhebliche Schwierigkeiten" gelingen kann. In allen sieben Auflagen des Buches findet man diesen Satz ohne Änderungen vor.

*) D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie" VII Auflage, Satz 9, S. 10.

2. Zusammenhang mit einem entsprechenden Satze

Der entsprechende Satz, einen Winkel betreffend, der Satz, welcher à priori einfacher sein sollte, wird dagegen von Hilbert präzisiert und ergänzt. So haben wir z. B. in der dritten Auflage des Buches keine Erklärung der „inneren" und „äusseren" Punkte eines Winkels*); im Gegenteil, in der siebenten Auflage gibt Hilbert eine ganz genaue Definition und fügt sogar einige Sätze hinzu.**) Es ist aber zu betonen, dass auch hier diese Sätze und die dazugehörigen Erklärungen nach dem Satz über einfaches Polygon und nach der Formulierung der Kongruenzaxiome folgen, obwohl die Erklärungen, sowohl auch die Sätze ohne Kongruenzaxiome aufgestellt werden können.

Wir glauben, dass aus didaktichen Gründen die Sätze über den Winkel vor dem Satze über einfaches Polygon stehen sollten und dass *mit Zuhilfenahme dieser Sätze* der Satz über einfaches Polygon streng bewiesen werden kann, ohne Gefahr, stillschweigend die geometrische Anschauung in unsere Überlegungen hineinzunehmen.***)

3. Nötige Voraussetzungen

Wir nehmen, als erfüllt, folgende Voraussetzungen an:
A) Axiome der Verknüpfung (I_{1-3}).

*) D. Hilbert. „Grundlagen der Geometrie", III Aufl. S. 10.

**) D. Hilbert. „Grundlagen der Geometrie", VII Aufl. S. 13.

***) Nach Fertigstellung meiner Abhandlung habe ich erfahren durch die freundliche Mitteilung des Herrn Professor O. Blumenthal-Aachen, dass ein Beweis des Hilbertschen Satzes in holländischer Sprache bereits erschienen ist: B. L. van der Waerden. „De logische grondslagen der Euklidische meetkunde", Groningen, P. Noordhoff, 1937.

Der Verfasser geht von der Definition aus, dass ein in der Ebene eines einfaches Polygons A, aber nicht auf seinem Rande liegender Punkt P innerhalb bzw. ausserhalb A gelegen heisst, je nachdem ein von ihm ausgehender Halbstrahl h, der keine Ecke von A trifft, den Rand eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen schneidet.

Diese Eigenschaft, welche Herr van der Waerden als Definition annimmt, kann als ein Satz aus unseren Überlegungen abgeleitet werden.

B) Axiome der Anordnung (II_{1-4}).

C) Erklärungen: Strecke, Streckenzug, Halbstrahl, Halbebene, Winkel, Polygon, Ecke des Polygons, einfaches Polygon u. s. w. Insbesondere — Definition des inneren Punktes eines Winkels.*)

D) Sätze:

a) Sind H und K zwei Punkte, welche im Innern oder auf den Schenkeln des Winkels $\angle (h, k)$ sich befinden: dann besteht die Strecke $\overline{HK}$ aus lauter inneren Punkten.

b) Ein Halbstrahl, welcher aus dem Scheitel des Winkels $\angle (h, k)$ ausgeht und weder mit h, noch mit k zusammenfällt, verläuft entweder ganz im Innern, oder ganz im Äussern des Winkels $\angle (h, k)$.

c) Sind H und K zwei Punkte, welche auf den Schenkeln des Winkels $\angle (h,k)$ sich befinden, und ist l ein innerer Halbstrahl, der aus dem Scheitel des Winkels $\angle (h, k)$ ausgeht: dann hat der Halbstrahl l einen gemeinsamen Punkt mit der Strecke $\overline{HK}$.

d) Ist eine Punktreihe auf einer Geraden a gegeben, so können wir stets diese Punkte in der Weise mit $A_1, A_2 \dots A_n$ bezeichnen, das $A_j (A_i A_k)$, wo $i < j < k$ ist**). Hieraus ergibt sich die Folgerung, dass es *nur zwei Punkte der Reihe* A_1, A_n *existieren, so dass* $A_1 \lesssim (A_i A_j)$ *und* $A_n \lesssim (A_i A_j)$ *ist;* diese Punkte können wir als äussere Punkte der Reihe bezeichnen.

4. Einige Definitionen

Vier Punkte einer Figur können so durch Strecken verbunden werden, dass ein einfaches Viereck entsteht. Dieses Viereck ist von solcher Beschaffenheit, dass entweder alle seine Ecken von einer Seite der Geraden, die irgendwelche zwei sukzessive Ecken verbindet, sich befinden, oder dass es eine solche Gerade

*) Ibid S. 13.

**) Wir bedienen uns der folgenden Symbole:

$A\,(BC)$ — „A liegt zwischen B und C“

$A \lesssim (BC)$ — „A liegt nicht zwischen B und C“.

existiert, dass die übrigen zwei Ecken von verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen.

Die Existenz solcher zwei Arten von Vierecken gibt Anlass zu einer neuen Definition:

Definition. Wir nennen ein Polygon konvex, wenn alle seine Ecken von einer Seite der Geraden, welche zwei beliebige sukzessive Ecken verbindet, sich befinden; dagegen nennen wir ein Polygon konkav, wenn es mindestens zwei sukzessive Ecken von solcher Beschaffenheit gibt, dass die Gerade, welche diese Ecken verbindet, die übrigen Ecken des Polygons so trennt, dass ein Teil von ihnen auf einer Seite und der andere auf anderer Seite sich befindet.

Eine solche Seite des konkaven Polygons nennen wir trennende Seite.

Ein Winkel, dessen Scheitel mit einer Ecke des konvexen Polygons zusammenfällt und dessen Schenkel zwei zu dieser Ecke gehörigen Seiten enthalten, heisst Winkel des konvexen Polygons.

Eine Strecke, welche zwei Ecken des konvexen Polygons verbindet und mit keiner der Seiten zusammenfällt, heisst Diagonale.

Die Gesammtheit der Punkte, welche entweder mit den Ecken des Polygons zussamenfallen, oder auf dessen Seiten liegen, heisst Peripherie des Polygons.

Hernach ergibt sich unsere Aufgabe:

a) die Behauptungen des Satzes über einfaches Polygon (§ 1) für ein konvexes Polygon zu beweisen;

b) mit Hilfe des für ein konvexes Polygon bewiesenen Satzes die Resultate auf ein konkaves Polygon zu übertragen.

Der systematischen Behandlung dieser Frage sind die folgenden Paragraphe gewidmet.

5. Konvexes Polygon

Es ist leich zu beweisen, dass jede Diagonale eines konvexen Polygons nur solche Punkte enthält, welche im Innern aller Winkel des Polygons sich befinden. Damit wird die Existenz einiger Arten von Punkten bewiesen, wodurch für uns eine neue Definition ermöglich wird:

Definition. Punkte der Ebene, welche in Innern aller Winkel eines konvexen Polygons sich befinden, heissen innere Punkte des konvexen Polygons.

Alle Punkte, welche keine inneren sind und gleichfalls zu der Peripherie nicht gehören, heissen äussere Punkte des konvexen Polygons.

Dann kommen die Sätze:

Satz 1. *Zwei Punkte, welche entweder an der Peripherie eines konvexen Polygons sich befinden, aber nicht zu einer Seite desselben gehören, oder zwei innere Punkte, oder zwei Punkte, von welchen ein innerer Punkt ist, der andere aber an der Peripherie des Polygons liegt, bestimmen stets eine Strecke, die ganz im Innern des Polygons verläuft.*

Insbesondere:

Satz 2. *Diagonalen eines konvexen Polygons bestehen aus inneren Punkten.*

Aus der Definition der inneren Punkte und dem Satz 1 folgt die Eigenschaft, dass zwei innere Punkte eines konvexen Polygons durch eine Strecke, die ganz im Inneren des Polygons verläuft, verbunden werden können. Daraus nach einer geringen Modifikation ergibt sich der Satz:

Satz 3. *Zwei innere Punkte eines konvexen Polygons können durch einen Streckenzug, welcher ganz im Innern des Polygons verläuft, verbunden werden.*

Ebenso gelangen wir zu solcher Eigenschaft der inneren Punkte:

Satz 4. *Ist a eine Gerade, welche zwei beliebige sukzessive Ecken des konvexen Polygons A_1, A_2 verbindet, so liegen alle andere Ecken $A_2, A_3 \ldots A_n$ mit jedem inneren Punkte M auf einer Seite der Geraden a.*

Definition. Es sei M ein innerer Punkt des konvexen Polygons $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Die Gesammtheit der Halbstrahlen, welche M mit allen Ecken des Polygons verbinden, heisst S t e r n.

Jeder Winkel, welcher aus zwei Sternstrahlen, die zu zwei sukzessiven Ecken gehören, gebildet ist, heisst S t e r n s e k t o r.

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir zu folgenden Sätzen gelangen:

S a t z 5. *Auf jeder Seite von der Geraden, welche einem Sternstrahl angehört gibt es mindestens je eine Ecke des konvexen Polygons.*

S a t z 6. *Sind A_1, A_2, A_3 drei sukzessive Ecken eines Polygons und M ein solcher innerer Punkt, dass die Ecken A_2, A_3 auf einer Seite der Geraden MA_1 sich befinden; dann liegt der Halbstrahl MA_2 im Innern des Winkels A_1MA_3.*

S a t z 7. *Ein jeder Halbstrahl, der aus einem inneren Punkte M des konvexen Polygons ausgeht und mit keinem Sternstrahl zusammenfällt, verläuft stets im Innern eines Sternsektors.*

In der Tat, es sei MN der gegebene Halbstrahl. Wir nehmen eine Ecke A_1 des Polygons, die nicht auf der Geraden MN liegt (Fig. 1) und ziehen eine Gerade A_1M, welche zwei Halbebenen α', α'' definiert.

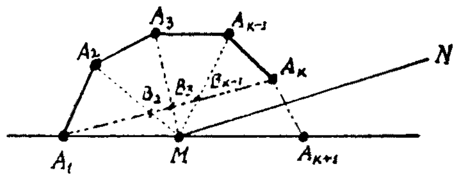

Fig. 1

Nach dem Satz 5 gibt es in jeder Halbebene einige Ecken des Polygons. Es seien $A_2, A_3 \dots A_k$ Ecken, welche sich in der Halbebene α' befinden. Alsdann bilden wir die zugehörigen Sternstrahlen: MA_2, $MA_3, \dots MA_k$.

Liegt der Halbstrahl MN im Innern eines der gebildeten Sternsektoren, so ist der Satz bewiesen. Deshalb nehmen wir an, der Halbstrahl MN liege nicht im Innern der Winkel $\angle A_1MA_2$, $\angle A_2MA_3 \dots \angle A_{k-1}MA_k$.

Es sei A_{k+1} die sukzessive Ecke zu A_k. Dann sind zwei Fälle möglich: entweder liegt A_{k+1} auf der Geraden A_1M, oder in der Halbebene α'' (Satz 5).

Im ersten Falle bilden wir das Dreieck $A_1 A_k A_{k+1}$. Wäre

$A_{k+1}(A_1 M)$, so wäre A_{k+1} ein innerer Punkt; wäre $A_1(A_{k+1} M)$, so wäre A_1 ein innerer Punkt (Satz 1). Deshalb $M(A_1 A_{k+1})$.

Da alle Halbstrahlen $MA_2 \ldots MA_{k-1}$ im Innern des Winkels $A_1 M A_k$ verlaufen (Satz 6), werden sie nach dem Satz § 3, D, c in Punkten $B_2, B_3 \ldots B_{k-1}$ mit der Strecke $\overline{A_1 A_k}$ durchschneiden. Deshalb würde der Halbstrahl MN die Seite $\overline{A_1 A_k}$ des Dreiecks schneiden, so befände sich dieser Halbstrahl im Innern eines Sternsektors $A_i M A_{i+1}$ $(1 \leqslant i < k)$ was gegen unserer Annahme ist. Darum schneidet der Halbstrahl MN die Seite $\overline{A_1 A_k}$ nicht und da $M(A_1 A_{k+1})$, soll der Halbstrahl MN die Seite $\overline{A_k A_{k+1}}$ durchschneiden (Axiom II_4). Daraus ergibt sich, dass der Halbstrahl MN im Innern des Sternsektors $A_k M A_{k+1}$ liegt.

Im zweiten Falle liegt der Punkt A_{k+1} in der Halbebene α'' und deshalb wird die Strecke $\overline{A_k A_{k+1}}$ einen Punkt K mit der Geraden $A_1 M$ gemein haben. Dieser Punkt kann nicht mit A_1 übereinstimmen (sonst würde die Ecke A_1 auf der Geraden $A_k A_{k+1}$ liegen, was der Definition eines konvexen Polygons widerspricht); er kann auch nicht mit dem Punkte M zusammenfallen (sonst würde ein innerer Punkt M auf der Seite $\overline{A_k A_{k+1}}$ des Polygons liegen).

Der Punkt K kann auch nicht so gelegen sein, dass A_1 zwischen ihm und M sich befände (Fig. 2).

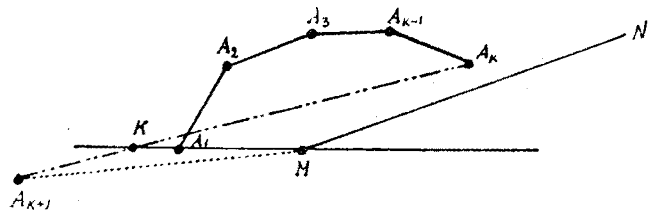

Fig. 2

In der Tat, nach der Definition, liegen A_k und A_{k+1} von einer Seite der Geraden $A_1 A_2$. Die Gerade $A_1 A_2$ kann deshalb nirgends die Strecke $\overline{A_k A_{k+1}}$ durchschneiden, speziell die Strecke $\overline{A_{k+1} K}$. So bekommen wir mit Hilfe des Axioms II_4 aus dem Dreieck $A_{k+1} K M$, dass die Gerade $A_1 A_2$ die Strecke $\overline{A_{k+1} M}$ durchschneiden soll. Dann würden sich aber die Punkte A_{k+1} und M auf verschiedenen Seiten der Geraden A_1A_2 befinden, was dem Satz 4 widerspricht.

Der Punkt K kann auch nicht zwischen A_1 und M gelegen sein: sonst würde ein innerer Punkt M und eine Ecke A_1 zu verschiedenen Seiten der Geraden $A_k A_{k+1}$ sich befinden, was unmöglich ist (Satz 4).

So ist $M(A_1 K)$ (Fig. 3) Wenn wir jetzt obige Überlegun-

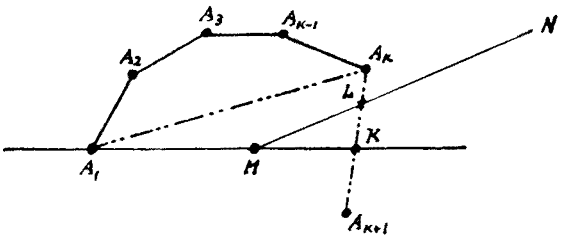

Fig. 3

gen auf das Dreieck A_1A_kK übertragen, so erhalten wir, dass der Halbstrahl MN die Strecke $\overline{A_kK}$ in einem Punkt $L(A_k K)$ schneidet; und da $K(A_k A_{k+1})$, so ist $L(A_k A_{k+1})$, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 8. *Ein jeder Halbstrahl, der aus einem inneren Punkte des konvexen Polygons ausgeht, hat einen Punkt mit der Peripherie gemein.*

Gehört dieser Halbstrahl zu dem Stern, so liegt auf ihm eine Ecke des Polygons; gehört er nicht zu dem Stern, so verläuft er nach dem Satz 7 im Innern eines Sternsektors und hat nach § 3, *D, c* mit angehöriger Seite einen Punkt gemein.

Satz 9. *Jede Gerade, die einen inneren Punkt des konvexen Polygons enthält, soll gewiss in zwei Punkten das Polygon durchschneiden.*

Es sei die Gerade a, deren Punkt M im Innern des konvexen Polygons sich befindet. Wir nehmen auf der Geraden a zwei Punkte M' und M'', so das $M(M' M'')$ und bilden zwei Halbstrahlen MM' und MM''. Da jeder von ihnen einen Punkt der Peripherie enthält (Satz 8), so ist der Satz bewiesen.

Als direkte Folge kommt jetzt der Satz;

Satz 10. *Es gibt keine Gerade, die ganz im Innern eines konvexen Polygons verläuft.*

Wen wir zwei äussere Punkte der sukzessiven Sternstrahlen durch eine Gerade verbinden, so bekommen wir den Satz:

Satz 11. *Es gibt solche Geraden, die aus lauter äusseren Punkten eines konvexen Polygons bestehen.*

Satz 12. *Jede Strecke, welche von einem inneren und äusseren Punkt gebildet ist, enthält einen Punkt der Peripherie des konvexen Polygons.*

In der Tat, seien M und N ein innerer und äusserer Punkt des Polygons. Der Halbstrahl MN enthält einen Punkt der Peripherie (Satz 8). Wäre dieser Punkt L so beschaffen, dass $N(ML)$, so wäre N ein innerer Punkt (Satz 1). Deshalb $L(MN)$, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 13. *Wenn zwei Punkte M und N, von welcher der erste im Innern eines konvexen Polygons sich befindet, durch einen Streckenzug, welcher ausschliesslich aus inneren Punkten besteht, verbunden sind, so ist der Punkt N etweder ein innerer Punkt, oder ein Punkt der Peripherie des Polygons.*

Da alle Punkte des gegebenen Streckenzuges $MA_1 \ldots A_kN$ sich im Innern des Polygons befinden, so ist der Punkt A_k auch ein innerer Punkt. Nehmen wir jetzt die Streke $\overline{A_kN}$. Wäre der Punkt N ein äusserer Punkt, so würde nach dem Satz 12 die Strecke A_kN einen Punkt der Peripherie enthalten, was zu unserer Annahme im Widerspruch steht. Somit ist der Satz bewiesen.

Satz 14. *Jeder Streckenzug, der einen inneren Punkt M mit einem äusseren Punkt N des konvexen Polygons verbindet, enthält mindestens einen Punkt der Peripherie.*

Würde der Streckenzug, welcher M und N verbindet, aus lauter inneren Punkten gebildet, so könnte der Punkt N kein äusserer Punkt sein (Satz 13).

Würde der Streckenzug einen äusseren Punkt enthalten, so wäre es eine Strecke, welche einen inneren und einen äusseren Punkt verbindet; so müsste sie auch einen Punkt der Peripherie enthalten (Satz 12). Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 15. *Zwei beliebigen äusseren Punkte eines konvexen Polygons können durch einen Streckenzug, welcher aus lauter äusseren Punkten besteht, verbunden werden.*

Ein äusserer Punkt, der auf einem Sternstrahl liegt, kann stets durch eine Strecke aus lauter äusseren Punkten mit einem äusseren Punkte des sukzessiven Sternstrahles verbunden werden. Ebenso, ein äusserer Punkt, welcher auf einem Sternstrahl liegt, kann man mit einem äusseren Punkte, welcher im Innern des zugehörigen Sternsektors sich befindet, durch eine Strecke aus lauter äusseren Punkten verbinden.

Da zwei beliebigen äusseren Punkte durch diese zwei Arten von Strecken immer mit einem Strekenzug verbunden werden können, so ist der Satz bewiesen.

Wir fügen noch einen Satz hinzu:

Satz 16. *Es seien G und g zwei konvexe Polygone von solcher Beschaffenheit, dass keine Ecke des g im Äussern des G liegt Dann wird jeder innerer Punkt von g gleichfalls ein innerer Punkt von G sein.*

Nehmen wir einen inneren Punkt in g — es sei O — und verbinden ihn mit einer Ecke des Polygons G.

Diese Ecke kann mit einer Ecke des Polygons g zussammenfallen (wie z. B. die Ecke A_2 Fig. 4). In diesem Falle wird der dazugehörige Winkel des g entweder mit dem Winkel des G zusammenfallen, oder einige Schenkel des Winkels des Polygons g werden im Innern des Winkels des Polygons G verlaufen. Da O der innere Punkt des Polygons g ist, liegt der Halbstrahl OA_2 zugleich im Innern des Winkels A_2' des Polygons g, wie auch des Winkels A_2 des Polygons G.

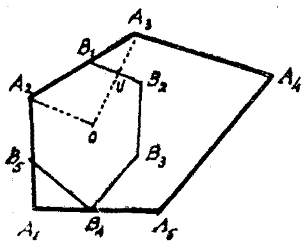

Fig. 4

Fällt die Ecke des G nicht mit einer Ecke des g zusammen (wie z. B. die Ecke A_3), so bilden wir einen Halbstrahl OA_3, welcher einen Punkt der Peripherie des g enthalten soll

(Satz 7). Wir bezeichnen diesen Punkt mit U. Ist U eine Ecke des g, so liegt U im Innern des G (nach unserer Annahme); liegt U auf einer Seite des g, so ist dieser Punkt auch ein innerer Punkt des G (Satz 1). Bei allen Voraussätzungen läuft der Halbstrahl OA_3 im Innern des Winkels A_3.

So ergibt sich, dass in allen Fällen der Punkt O sich im Innern jedes Winkels von G befindet, womit der Satz bewiesen ist.

Die Sätze 3, 10, 11, 14 und 15 sind dem Satz § 1 im Falle eines konvexen Polygons gleichlautend. Deshalb können wir sagen, dass der Satz über Zerteilung der Ebene für jedes Polygon konvexen Typus bewiesen ist.

6. Konkaves Polygon.

Definition. Wir ziehen eine Gerade a, welche durch eine trennende Seite des konkaven Polygons geht. Alle Durchschnittspunke dieser Geraden mit der Peripherie des Polygons seien nach dem § 3, D, d so angeordnet, dass A_1 der äussere Punkt dieser Reihe sei.

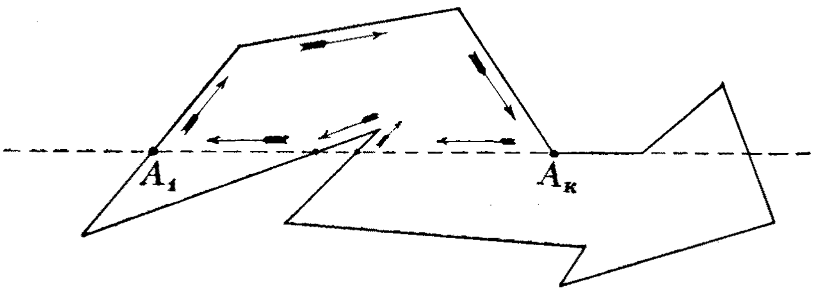

Fig. 5

Läuft aus dem Punkte A_1 nur eine Seite des Polygons (oder ihr Teil, Fig. 5), so benutzen wir einen Teil der Peripherie welcher in einer bestimmten Halbebene sich befindet, bis wir zu einem Punkt A_k gelangen, welcher auf der Geraden a liegt. Hängt mit diesem letzten Punkt ein anderer Teil der Peripherie zusammen, welcher auch in dieser Halbebene durchläuft, so werden wir auch ihn zur Konstruktion benutzen, bis wir wieder zu einem Punkt der Geraden a zurückgelangen.

Hängt mit diesem Punte kein neuer Teil der Peripherie in dieser Halbebene zusammen, so benutzen wir eine Strecke, die A_k mit A_{k-1} verbindet. Die Wiederholung dieser Operation führt uns zu einem Polygon G.

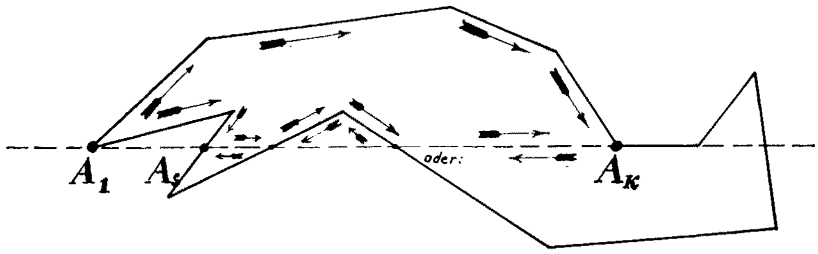

Fig. 6.

Laufen aus dem Punkte A_1 zwei Seiten, welche in der Ebene α sich befinden, zusammen, so verfahren wir ebenso, indem wir die beiden Zweige der Peripherie benutzen. Dann bekommen wir zwei Punkte A_k, A_s (Fig. 6), die auf der Geraden a liegen, welche wir dann unter Benutzung aller Punkte $A_i\,(A_s\,A_k)$ und angehöriger Ecken des Polygons mit einem Streckenzuge verbinden.

Wir bekommen so ein gans bestimmtes Polygon G.

Ein solcher Polygon heisst E l e m e n t a r p o l y g o n.

Dessen Seiten, welche keine Teile der Peripherie des gegebenen Polygons sind, heissen n e u e S e i t e n des Elementarpolygons.

Aus dieser Definition des Elementarpolygons ergibt sich der Satz:

S a t z 17. *Ein jedes Elementarpolygon erhält mindestens eine neue Seite.*

Nehmen wir dann eine neue Seite des Elementarpolygons. Zu dieser neuen Seite soll sich durchaus ein Teil des gegebenen Polygons einschliessen, der auf anderer Seite der Geraden a liegt. Mit Hilfe einer Ecke der neuen Seite und zu ihr angehörigen Teil der Peripherie können wir ein anderes Elementarpolygon in der entgegengesetzten Halbebene konstruieren; die Gesammtheit aller neuen Seiten dieses Polygons wird durchaus die angegebene neue Seite enthalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so kommen wir zum folgenden Satz:

S a t z 18. *Ein jedes konkaves Polygon kann man so in Elementarpolygone zerteilen, dass es ermöglicht wird eine solche Reihe von Elementarpolygonen zu bilden, in welcher zwei Elementarpolygone mindestens je eine neue Seite gemein haben.*

D e f i n i t i o n. Eine solche Reihe heist K e t t e der Elementarpolygone.

S a t z 19. *Jedes Elementarpolygon hat weniger trennende Seiten, als das gegebene konkave Polygon.*

Es sei n die Anzahl der trennenden Seiten des gegebenen konkaven Polygons. Jede neue Seite in einem Elementarpolygon kann für ihn nicht eine trennende sein, da alle Ecken desselben auf einer Seite der Geraden a liegen; so ist jede trennende Seite des Elementarpolygons zugleich trennende Seite des gegebenen Polygons. Da die trennende Seite des gegebenen Polygons, welche die Gerade a bestimmt, keine trennende Seite eines Elementarpolygons sein kann, so ist die Anzahl der trennenden Seiten eines Elementarpolygons nicht mehr als $n-1$ und deshalb, selbst im ungünstigsten Falle, ist der Satz bewiesen.

S a t z 20. *Jedes konkave Polygon kann so in Polygone zerteilt werden, dass jedes Polygon von konvexem Typus wird.*

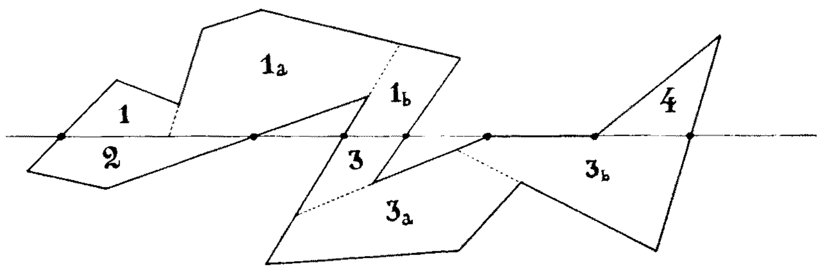

Fig. 7

Angenommen es seien $G_1\, G_2 \ldots G_k$ Elementarpolygone auf welchen das gegebene konkave Polygon zerteilt ist. Wären einige von ihnen konkav, so setzen wir das Verfahren über diese Polygonen fort, und anstatt eines, z. B. G_i, bekommen wir $G_i^1, G_i^2 \dots G_i^k$.

Da nach dem Satz 19 jedes Polygon G_i^j weniger als das Polygon G_i trennenden Seiten hat, so kann dieses Verfahren nicht unbegrenzt fortgesetzt werden, und nach einigen Operationen sollen wir durchaus zu einem Polygon gelangen, welches die Anzahl der trennenden Seiten Null besitzt, d. h. zu einem konvexen Polygon. Da eine neue Seite des Polygons G_i^j keine Seite des gegeben Polygons sein kann, so gestatten uns die Sätze 19 und 20, wenn wir die Bezeichnung „Elementarpolygone" für alle diese Polygone beibehalten, folgenden Satz auszusprechen:

Satz 21. *Jedes konkave Polygon lässt sich in Elementarpolygone so zerteilen, dass alle diese Polygone konvex werden und dass zwei beliebige von ihnen durch eine Kette der Polygone verbunden werden können.* (Fig. 7).

Definition. Sei das gegebene konkave Polygon in konvexe Elementarpolygone verteilt.

Alle Punkte, welche entweder im Innern eines jeden Elementarpolygons sich befinden, oder auf einer neuen Seite desselben liegen, heissen innere Punkte des gegebenen konkaven Polygons.

Punkte der Ebene, welche keine innere Punkte sind und nicht der Peripherie des gegebenen Polygons angehören, heissen äussere Punkte des Polygons.

Die Sätze 21 und 13 ermöglichen uns zwei beliebige inneren Punkte durch einen solchen Streckenzug zu verbinden, dass er ganz im Innern des konkaven Polygons verläuft. So kommen wir zu dem Satz:

Satz 22. *Zwei innere Punkte eines konkaven Polygons können stets mit einem Streckenzug so verbunden werden, dass dieser Streckenzug keinen Punkt der Peripherie enthalten wird.*

Definition. Sei ein einfaches konkaves Viereck gegeben (Fig. 8). Da können wir zwei seiner Ecken B und D, welche zu zwei trennenden Seiten gehören, mit solcher Strecke $\overline{BD}$ verbinden, dass ein Dreieck gebildet wird von solcher Beschaffenheit, dass keine Ecken des Vierecks im Äussern des Dreiecks sich befinden. Das ermöglicht uns eine neue Definition aufzustellen:

Es sei ein konkaves Polygon P gegeben.

Ein konvexes Polygon P', dessen Ecken zu Ecken des Polygons P gehören, von solcher Beschaffenheit, dass keine Ecke des Polygons P im Äussern des Polygons P' sich befindet, heist e i n s c h l i e s s e n d e s Polygon.

Jede Seite des einschliessenden Polygons, welche keine Seite des gegebenen Polygons ist, heist n e u e Seite des einschliessenden Polygons.

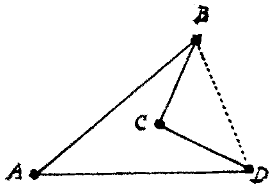

Fig. 8

S a t z 23. *Für jedes konkave Polygon kann man ein entsprechendes einschliessendes Polygon bilden.*

Angenommen, es sei der Satz für jedes konkave n-Eck richtig; wir wollen beweisen, dass er für ein $(n+1)$—Eck gültig sein soll.

Nach unserer Annahme, kann man n Ecken unseres Polygons mit einem einschliesenden Polygon umfassen; es sei das Polygon $A_1 A_2 \dots A_s$.

Es sei K die Ecke des gegebenen Polygons, die wir nicht in Betracht gezogen haben. Ist K im Innern oder an der Peripherie des $A_1 A_2 \dots A_s$, so wäre des Satz bewiesen. Demnach nehmen wir an, es sei K im Äussern des Polygons $A_1 A_2 \dots A_s$ (Fig. 9).

Ist K im Äussern des Polygons, so gibt es eine solche Seite $\overline{A_i A_{i+1}}$, dass die Punkte $A_1, A_2 \dots A_{i-1}, A_{i+2} \dots A_s$ von einer Seite der Geraden $A_i A_{i+1}$ sich befinden, indem der Punkt K auf der anderen Seite dieser Geraden bleibt. Demnach werden alle Halbstrahlen $KA_1, KA_2 \dots KA_{i-1}, KA_{i+2} \dots KA_s$ sich mit der Geraden $A_i A_{i+1}$ in bestimmten Punkten $B_1, B_2 \dots B_{i-1}, B_{i+2} \dots B_s$ schneiden. Nach § 3, D, d kann man diese Punkte so anordnen, dass zwei Punkte (es seien B_1 und B_r) äussere

Punte der Reihe seien. Dann ziehen wir durch entsprechende Ecken A_1, A_r die Gerade $A_1 A_r$.

So ergibt sich ein konvexes Polygon $A_1 A_2 \ldots A_s$ von solcher Beschaffenheit, dass die Punkte $A_2, A_3 \ldots A_{r-1}$ einerseits und $A_{r+1}, A_{r+2} \ldots A_s$, K andererseits von verschiedenen Seiten der

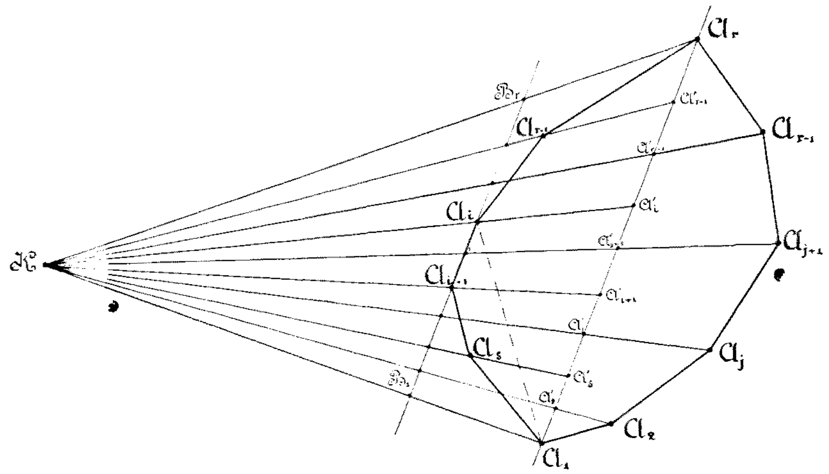

Fig. 9

Geraden $A_1 A_r$ sich befinden. Die Schnittpunkte der Halbstrahlen $KA_2, KA_3 \ldots KA_{r-1}$ mit der Geraden $A_1 A_r$ bezeichnen wir mit $A_2', A_3' \ldots A'_{r-1}$.

Für unsere Aufgabe ist es hinreichend zu beweisen, dass das Polygon $A_1 A_2 \ldots A_r K$ konvex ist und dass keine Ecken des gegebenen Polygons $A_1 A_2 \ldots A_n K$ im Äussern des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_r K$ liegen.

Teilen wir die Seiten des $A_1 A_2 \ldots A_n K$ in drei Arten:

α) $\overline{A_1 K}$ (oder $\overline{A_r K}$)

Da alle Punkte $A_2, A_3 \ldots A_{r-1}$ auf inneren Halbstrahlen des Winkels $A_1 K A_r$ liegen, so sind sie innere Punkte dieses Winkels, d. h. $A_2, A_3 \ldots A_{r-1}, A_r$ befinden sich von einer Seite der Geraden $A_1 K$.

Ebenso liegen die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}$ von einer Seite der Geraden $A_r K$.

β) $\overline{A_1 A_2}$ (oder $\overline{A_{r-1} A_r}$)

Wir nehmen das Dreieck $A_2'KA_r$ (Fig. 9). Die Gerade A_1A_2 kann nicht die Seite $\overline{A_2'A_r}$ schneiden, denn $A_2 \lesssim (A_2'A_r)$; sie kann auch keinen gemeinsamen Punkt mit $\overline{A_2'K}$ haben, denn $A_2 \lesssim (A_2'K)$. Nach Axiom II_4 schneidet sie auch die Strecke $\overline{KA_r}$ nicht: K und A_r liegen von einer Seite der Geraden A_1A_2. Da aber, nach unserer Annahme, $A_3, A_4 \ldots A_r$ von einer Seite der Geraden A_1A_2 liegen, so befinden sich die Punkte $A_3, \ldots A_r, K$ von einer Seite der Geraden A_1A_2.

Ebenso liegen die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}, K$ von einer Seite der Geraden $A_{r-1}A_r$.

γ) $$A_jA_{j+1} \quad 2 \leqslant j \leqslant r-2$$

Wir nehmen das Dreieck $A_j'KA_r$. Die Gerade A_jA_{j+1} kann nicht die Seite $\overline{KA_j'}$ schneiden, denn $A_j \lesssim (A_j'K)$. Da der Punkt A_j' auf der Diagonale $\overline{A_1A_r}$ des konvexen Polygons $A_1A_2 \ldots A_s$ liegt, sind alle Punkte der Strecke $\overline{A_j'A_r}$ innere Punkte (Satz 2) und liegt jeder Punkt dieser Strecke von einer Seite der Geraden A_jA_{j+1} mit beliebiger Ecke des Polygons $A_1A_2 \ldots A_s$ (Satz 4), d. h. A_j' und A_j befinden sich von einer Seite der Geraden A_jA_{j+1}. So kann die Gerade A_jA_{j+1} nicht die Strecke $\overline{A_j'A_r}$ schneiden; deshalb, nach Axiom II_4, schneidet die Gerade A_jA_{j+1} die Strecke $\overline{KA_r}$ nicht; K und A_r liegen von einer Seite der Geraden A_jA_{j+1}.

Da $A_1 \ldots A_{j-1}, A_{j+2} \ldots A_r$ von einer Seite der Geraden A_jA_{j+1} liegen, so bekommen wir, dass auch $A_1, \ldots A_{j-1}, A_{j+2} \ldots \ldots A_r, K$ von einer Seite der Geraden A_jA_{j+1} sich befinden.

Aus Ergebnissen α), β), γ), schliessen wir, dass das Polygon $A_1A_2 \ldots A_rK$ von konvexem Typus ist.

Um zu beweisen, dass keine Ecke des gegebenen konkaven Polygons im Aussern des Polygons $A_1A_2 \ldots A_sK$ liegt, teilen wir diese Ecken in drei Arten:

α) die Ecken $A_1, A_2 \ldots A_r, K$, die zugleich die Ecken des gebildeten konvexen Polygons sind;

β) die Ecken $A_{r+1}, A_{r+2} \ldots A_s$, die zugleich die Ecken des konvexen Polygons $A_1A_2 \ldots A_s$ sind, aber von derselben Seite, wie K, von der Geraden A_1A_r liegen;

γ) die Ecken $A_{s+1}, A_{s+2} \ldots A_n$, die nach unserer Annahme im Innern des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_s$ sich befinden.

Es ist selbstverständlich, dass keine Punkte der ersten Art im Äussern des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_r K$ sich befinden können.

Punkte der zweiten Art liegen durchaus im Innern des Winkels K und nicht im Äussern der Winkel $A_1, A_2 \ldots A_{r-1}$ des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_s$. Es ist nur zu beweisen, dass sie auch im Innern der Winkel A_1 und A_r des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_r K$ liegen.

Es sei A_i eine Ecke dieser Art (Fig. 9). Wir bilden zwei Halbstrahlen KA_2, KA_i; da A_2 und K von verschiedenen Seiten von $A_1 A_r$ liegen, bestimmen wir einen Punkt A_2'; da A_i im Innern des Winkels K liegt, bekommen wir einen Punkt A_i'. Die so erhaltenen Punkte liegen zwischen A_1 und A_r; deshalb kann die Gerade $A_1 A_i$ die Seite $\overline{A_i' A_2'}$ des Dreiecks $A_2' K A_i'$ nicht schneiden. Da $A_i (A_i' K)$ ist, so soll nach dem Axiom II_4 die Seite $\overline{A_2' K}$ mit der Geraden $A_1 A_i$ im Punkte $U(A_2'K)$ sich schneiden. Da $U(A_2'K)$ und $A_2'(A_2 K)$ sind, so ist $U(A_2 K)$ und dadurch ist $A_1 A_i$ ein innerer Halbstrahl des Winkels $A_2 A_1 K$ und ist A_i ein innerer Punkt dieses Winkels.

Ebenso erhalten wir, dass A_i ein innerer Punkt des Winkels $A_{r-1} A_r K$ sein muss.

Somit liegen keine Ecken des Polygons $A_1 A_3 \ldots A_s$ im Äussern des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_r K$.

Punkte der dritten Art sind innere Punkte des Polygons $A_1 A_2 \ldots A_s$; nach dem Satz 16 liegen sie bestimmt im Innern des gebildeten Polygons $A_1 A_2 \ldots A_r K$.

Somit ist das Polygon $A_1 A_2 \ldots K$ ein einschliessendes Polygon, und da der Satz für $n=4$ richtig ist, bleibt er richtig für jede beliebige Zahl n.

Definition. Nehmen wir an, es sei ein konkaves Polygon g gebenen. Zu diesem Polygon bilden wir ein einschliessendes Polygon G, das gewiss einige neue Seiten $s_1, s_2 \ldots s_h$ enthalten wird.

Aus jeder solchen Seite s_i und aus dem an dieselbe sich anschliessenden Teil der Peripherie des gegebenen Polygons konstruieren wir ein neues Polygon g_i.

Solches Polygon nennen wir **ergänzendes** Polygon (Fig. 10).

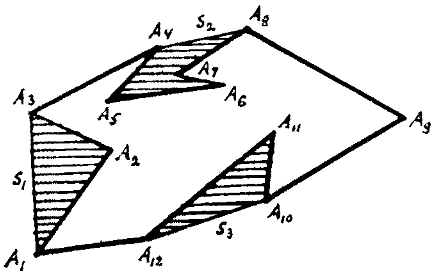

Fig. 10

Satz 24. *Zwei äussere Punkte eines konkaven Polygons können stets durch einen Streckenzug, welcher aus lauter äusseren Punkten besteht, verbunden werden.*

Es ist selbstverständlich, dass jeder äussere Punkt des gegebenen konkaven Polygons g entweder im Innern eines ergänzenden Polygons g_i, oder auf einer neuen Seite s_i des einschliessenden Polygons, oder im Äussern desselben sich befindet. Zwei solche Punkte können durchaus durch einen Streckenzug verbunden werden, welcher entweder ganz im Innern eines ergänzenden Polygons, oder im Äussern des einschliessenden Polygons verläuft, oder aus beiden Arten dieser Streckenzüge besteht, indem er einige neue Seiten des einschliessenden Polygons schneidet. In allen Fällen enthält der Streckenzug nur äussere Punkte des gegebenen Polygons, und damit ist der Satz bewiesen.

Satz 25. *Wenn zwei Punkte M und N, von welcher der erste im Innern eines konkaven Polygons sich befindet, durch einen Streckenzug, welcher aus lauter inneren Punkten besteht, verbunden sind, so ist der Punkt N entweder ein innerer Punkt, oder liegt er an der Peripherie des Polygons.*

Wir nehmen an, es sei das Polygon in konvexe Elementarpolygone zerteilt und es sei M ein innerer Punkt des gegebenen Polygons.

Sei $\overline{MM_1}$ eine Strecke, die keine äussere Punkte des Polygons enthält: d. h. alle Punkte dieser Strecke befinden sich im Innern oder an neuen Seiten der zugehörigen konvexen Elementarpolygone. Nach dem Satz 14, kann der Punkt M_1 entweder im Innern, oder an der Peripherie eines Elementarpolygons sich befinden. Im zweiten Falle — wird er entweder ein innerer Punkt, oder ein Punkt der Peripherie des gegebenen Polygons.

Werden wir diese Überlegungen an alle Strecken des Streckenzuges $M, M_1 M_2 \ldots M_n N$ anwenden, so wird der Satz bewiesen.

Satz 26. *Jeder Streckenzug, der einen inneren Punkt M mit einem äusseren Punkt N des konkaven Polygons verbindet, enthält mindestens einen Punkt der Peripherie.*

Wäre das nicht des Fall, so würde N nach dem Satz 25 kein äusserer Punkt sein, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 27. *Jeder Halbstrahl, der aus einem inneren Punkte eines konvexen Polygons ausgeht, enthält mindestens einen Punkt mit der Peripherie gemein.*

Angenommen, es sei das Polygon in konvexe Elementarpolygone zerteilt. Dann muss der Halbstrahl eine Kette von Elementarpolygonen schneiden, und da dieselben in begrenzter Anzahl sind, muss (nach dem Axiom II_2) der Halbstrahl zu einem äusseren Punkt des letzten Elementarpolygons vordringen. Die letzte Seite, welche der Halbstrahl das Elementarpolygon durchschneidet, kann keine neue Seite sein, denn in solchem Falle wäre noch ein benachbartes zu dieser Seite Elementarpolygon vorhanden. Da diese Seite keine neue Seite ist, soll der Schnittpunkt der Peripherie angehören.

Durch genaue Anwendung der Überlegungen, welche uns zu den Sätzen 9 und 10 geführt haben, erhalten wir den Satz:

Satz 28. *Es gibt keine Gerade, die ganz im Innern des konkaven Polygons verläuft.*

Da aber eine Gerade existiert, die ganz im Äussern des einschliessenden Polygons läuft (Satz 11), so wird diese Gerade auch im Äussern des gegebenen Polygons verlaufen. Daraus folgt der Satz:

Satz 29. *Es gibt solche Geraden, die aus lauter äusseren Punkten eines konkaven Polygons bestehen.*

Die Sätze 22, 24, 26, 28 und 29 sind dem Satz § 1 im Falle eines konkaven Polygons gleichlautend. Deshalb ist der Satz über die Zerteilung der Ebene für jedes Polygon konkaven Typus bewiesen, und damit auch der Hilbertsche Satz über jedes beliebige einfache Polygon

7. Zusammenhang mit der Flächeninhaltslehre.

Die Sätze über die Zerteilung eines konkaven Polygons in konvexe Elementarpolygone (Satz 20) und über die Diagonale eines konvexen Polygons (Satz 2) gestatten uns folgenden Satz auszusprechen:

Satz 30. *Ein jedes einfache Polygon lässt sich so in Dreiecke verteilen, dass alle Seiten dieser Dreiecken, die zur Peripherie des Polygons nicht angehören, im Innern des Polygons enthalten sind.*

Dieser Satz ist von grundsätzlicher Bedeutung: erst mit Hilfe dieses Satzes ist es möglich die strenge Begründung der Flächeninhaltslehre durchzuführen.