

**Quelques conclusions à tirer des diverses
évaluations des inégalités séculaires de l'excentricité
de l'orbite de la terre**

Par

V. V. MICHKOVITCH

En 1930, j'ai présenté¹⁾ à l'Académie royale serbe une Note contenant les résultats des calculs des inégalités séculaires des éléments orbitaux de la Terre, c'est-à-dire les valeurs numériques des quatre éléments: excentricité, longitude du périhélie, longitude du noeud ascendant et inclinaison, calculées de 10.000 en 10.000 ans, pour une période de 650 000 ans antérieurs au 1 janvier 1800. Ces nombres devaient servir de point de départ à une vérification ou, plutôt, à une étude approfondie du climat terrestre, à l'aide de la nouvelle théorie²⁾ de *M. Milankovitch* sur le climat mathématique et ses variations. Vérification en tant que, dans son premier ouvrage³⁾, *M. Milankovitch* avait basé ses investigations sur les évaluations des inégalités séculaires de e , ϵ , et π déduites par *Pilgrim*⁴⁾ des équations de *Stock-*

1) Glas Srpske kraljevske Akademije, t. CXLIII p. 92 (1931).

2) *M. Milankovitch* — Mathematische Klimalehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Handb. der Klimatologie. Verl. Gebr. Borntraeger, Berlin, 1930.

3) *M. Milankovitch* — Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. — Gauthier-Villars Paris, 1920.

4) *I. Pilgrim* — Versuch einer rechnerischen Behandlung des Eiszeitproblems. — Jahreshefte der Ver. für vaterl. Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1904.

*well*⁵⁾. Or de petites erreurs retrouvées depuis dans quelquesunes de ces valeurs, mais surtout les nouvelles corrections à appliquer aux valeurs de masses de la majorité des planètes, employées par *Pilgrim*, laissaient entrevoir la possibilité de faire disparaître les quelques légers desaccords, restés jusqu'alors inexplicables entre les théories climatologique et mathématique.

Pour atteindre ce but, il suffisait de se reporter aux systèmes d'équations donnés par *Stockwell*⁵⁾, d'y substituer les corrections connues des masses planétaires, pour en déduire les nouvelles valeurs des variations séculaires en question. Cependant cette voie, quoique la plus directe, ne put pas nous conduire au but visé! (J'ai constaté, mais plus tard seulement, que cet échec était dû à une erreur de signe dans les équations de départ). Alors, d'accord avec *M. Milankovitch*, il fut décidé de reprendre le travail, mais en partant des équations de *Leverrier*⁶⁾ ce qui fut fait. Les résultats de ces calculs se trouvent résumés dans la Note¹⁾ présentée, en 1930, à l'Académie royale serbe. Ce sont aussi ces nombres qui constituent la base de la nouvelle théorie mathématique³⁾ appliquée à l'étude des variations du climat terrestre au cours du passé géologique.

De la même manière furent calculées, quelques temps après⁷⁾, les inégalités séculaires des mêmes éléments de l'orbite de la Terre, pour une période de 100 000 années postérieures au 1 janvier 1800.

Ce travail terminé, une question se posait pour ainsi dire d'elle-même, à savoir: quel effet ont produit les corrections apportées aux masses planétaires sur les valeurs des variations séculaires? — Mais, à côté de celles-ci, une seconde question m'inquiétait encore davantage, c'est celle de l'approximation réalisée par les différentes évaluations des variations séculaires, et en particulier de celles des éléments orbitaux de la Terre. Elles me paraissaient d'autant plus justifiées que, outre les simplifications admises dans les calculs précédents, basés sur les

5) *J. N. Stockwell* — Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets, *Smiths. Contrib.* 232. 1870

6) *U. T. Leverrier* — Inégalités séculaires des éléments des orbites des huit principales planètes. *Annales de l'Obs. imp. de Paris* t. II 1856.

7) *V. V. Michkovitch* — Sur les inégalités séculaires des éléments orbitaux de la Terre. *Glas Srpske Kraljevske Akademije* 1938.

équations de *Leverrier*, on a négligé l'action de la planète Neptune. Il est vrai que *Leverrier*, ayant examiné aussi les changements causés par la présence de la planète Neptune dans les formules établies, conclut à ce sujet que, pour Jupiter et Saturne, ces dernières sont peu altérées, dans leurs termes principaux. Quant aux quatre premières planètes (Mercure, Venus, Terre, Mars), cette recherche devient inutile à cause de l'incertitude des formules générales venant de la connaissance imparfaite de leurs masses (les satellites de Mars n'ayant été découvertes qu'en 1877).

Mais, d'autre part *Stockwell*, dans l'Introduction de son Mémoire sur les variations séculaires, ne dit-il pas: „Besides... the action of this planet (Neptune) considerably modifies the secular inequalities which would otherwise take place“.

Et, enfin, bien que dans l'application qu'on allait faire et qu'on va faire de ces résultats on ne recherche pas la précision astronomique habituelle, l'étendue de la période considérée ne va-t-elle pas compromettre la validité des formules employées et, par conséquent, rendre illusoirs les valeurs numériques déduites ?

VALEURS DES MASSES PLANÉTAIRES UTILISÉES ($m_{\odot} = 1$)

Planète	Leverrier $m(L)$	Stockwell $m(S)$	Michkovitch $m(M)$	$m(L) :$ $:m(M)$	$m(S) :$ $:m(M)$
Mercure	1 909 706	4 865 751	6 000 000	3,142	1,233
Venus	401 839	390 000	408 000	1,015	1,046
Terre	356 354	368 689	329 390	0,924	0,893
Mars	2 680 337	2 680 637	3 093 500	1,154	1,154
Jupiter	1 050	1 047,88	1 047,35	0,997	1,000
Saturne	3 512	3 501,6	3 501,6	1,000	1,000
Uranus	17 918	24 905	22 869	1,276	0,918
Neptune	18 780	(19 380)

Afin d'arriver à une appréciation au moins qualitative de l'effet global produit sur les inégalités séculaires, à la fois par les corrections appliquées aux valeurs des masses, et par le fait que l'action de la planète Neptune sur ces inégalités n'était pas prise en considération, je fis le rapprochement entre les valeurs

des inégalités séculaires de l'excentricité de l'orbite de la Terre, déduites des équations et valeurs des masses de *Leverrier* et de *Stockwell*, d'une part, et de celles déduites des équations de *Leverrier* après avoir corrigé les masses planétaires, d'autre part.

Pour rendre cette comparaison accessible et plus instructive je donne, d'abord, les valeurs des masses des huit planètes principales (voir le tableau p. 211) telles qu'elles ont été utilisées par chacun des trois auteurs.

Puis voici les valeurs des excentricités, $e(M)$ de 10 000 on 10 000 ans résultant des équations de *Leverrier* après correction des masses planétaires, pour les 650 000 années antérieurs et 100 000 postérieurs à 1850 (1800). Les excentricités résultant des équations de *Leverrier* $e(L)$ et *Stockwell* $e(S)$ ont été empruntées au Mémoire⁹⁾ de *R. W. Mc Farland*.

Millénaire à partir de 1850	$e(L)-e(M)$	$e(S)-e(M)$	$e(M)$	$\frac{e(L)-e(M)}{e(M)}$	$\frac{e(S)-e(M)}{e(M)}$
— 650	— 0,0077	+ 0,0006	0 0304	— 0,253	+ 0,020
640	— 0024	— 0020	0257	— 0,093	— 0,078
630	+ 0072	— 0030	0177	+ 0,407	— 0,169
620	+ 0181	+ 0021	0106	+ 1,708	+ 0,198
610	+ 0201	+ 0072	0152	+ 1,322	+ 0,474
600	+ 0152	+ 0087	0266	+ 0,571	+ 0,327
590	+ 0079	+ 0065	0372	+ 0,212	+ 0,175
580	+ 0044	+ 0075	0434	+ 0,101	+ 0,173
570	— 0025	+ 0060	0475	— 0,053	+ 0,126
560	— 0088	+ 0040	0456	— 0,193	+ 0,088
550	— 0129	+ 0018	0391	— 0,330	+ 0,046
540	— 0162	— 0005	0288	— 0,563	— 0,017
530	— 0138	— 0029	0162	— 0,852	— 0,179
520	+ 0114	— 0028	0051	+ 2,235	— 0,549
510	+ 0187	+ 0041	0128	+ 1,461	+ 0,320
500	+ 0188	+ 0087	0200	+ 0,940	+ 0,435
490	+ 0120	+ 0039	0326	+ 0,368	+ 0,212
480	+ 0,0089	0,0044	0,0381	+ 0,234	+ 0 115

⁹⁾ *R. W. Mc Farland* — Perihelion and excentricity. American J. of Science 1880.

Millénaire à partir de 1850	$e(L) - e(M)$	$e(S) - e(M)$	$e(M)$	$\frac{e(L) - e(M)}{e(M)}$	$\frac{e(S) - e(M)}{e(M)}$
470	+ 0,0043	+ 0,0037	0,0400	+ 0,108	+ 0,093
460	- 0,0022	+ 0,0001	0,0409	+ 0,054	+ 0,002
450	- 0,0033	+ 0,0012	0,041	+ 0,097	+ 0,035
440	- 0,0049	+ 0,0005	0,0421	+ 0,196	+ 0,018
430	- 0,0053	+ 0,0005	0,0486	+ 0,263	+ 0,027
420	- 0,0013	+ 0,0019	0,0500	+ 0,130	+ 0,190
410	+ 0,0056	+ 0,0038	0,065	+ 0,862	+ 0,584
400	+ 0,0048	+ 0,0026	0,119	+ 0,403	+ 0,218
390	+ 0,0048	+ 0,0009	0,173	+ 0,150	+ 0,052
380	+ 0,0026	- 0,0003	0,202	- 0,000	- 0,015
370	- 0,0000	- 0,0003	0,203	- 0,089	- 0,015
360	- 0,0018	+ 0,0006	0,182	- 0,060	+ 0,033
350	- 0,0011	+ 0,0030	0,160	+ 0,219	+ 0,187
340	+ 0,0035	+ 0,0051	0,171	+ 0,520	+ 0,298
330	+ 0,0089	+ 0,0058	0,220	+ 0,532	+ 0,264
320	+ 0,0117	+ 0,0056	0,278	+ 0,435	+ 0,201
310	+ 0,0121	+ 0,0049	0,321	+ 0,340	+ 0,153
300	+ 0,0109	+ 0,0039	0,334	+ 0,269	+ 0,116
290	+ 0,0090	+ 0,0028	0,309	+ 0,107	+ 0,091
280	+ 0,0033	+ 0,0012	0,250	+ 0,144	+ 0,048
270	+ 0,0036	+ 0,0007	0,170	+ 0,259	- 0,041
260	+ 0,0044	+ 0,0017	0,110	+ 0,107	+ 0,155
250	+ 0,0061	+ 0,0008	0,153	+ 0,699	+ 0,052
240	+ 0,0107	+ 0,0025	0,246	+ 0,492	+ 0,102
230	+ 0,0121	+ 0,0037	0,333	+ 0,432	+ 0,111
220	+ 0,0144	+ 0,0041	0,396	+ 0,376	+ 0,104
210	+ 0,0149	+ 0,0041	0,430	+ 0,319	+ 0,095
200	+ 0,0134	+ 0,0035	0,435	+ 0,308	+ 0,080
190	+ 0,0114	+ 0,0027	0,415	+ 0,275	+ 0,065
180	+ 0,0100	+ 0,0018	0,377	+ 0,265	+ 0,048
170	+ 0,0083	+ 0,0004	0,330	+ 0,252	+ 0,012
160	+ 0,0074	- 0,0002	0,285	+ 0,260	- 0,007
150	+ 0,0075	- 0,0003	0,0257	+ 0,292	- 0,012

Millénaire à partir de 1850	$e(L) - e(M)$	$e(S) - e(M)$	$e(M)$	$\frac{e(L) - e(M)}{e(M)}$	$\frac{e(S) - e(M)}{e(M)}$
- 140	+0,0081	+0,0006	0,0260	+0,312	+0,023
130	+ 0092	+ 0014	0,293	+0,314	+0,048
120	+ 0090	+ 0020	0,336	+0,268	+0,060
110	+ 0090	+ 0022	0,372	+0,241	+0,059
100	+ 0087	+ 0022	0,386	+0,225	+0,027
90	+ 0081	+ 0021	0,371	+0,218	+0,057
80	+ 0072	+ 0017	0,326	+0,221	+0,052
70	+ 0060	+ 0013	0,256	+0,234	+0,051
60	+ 0044	+ 0007	0,174	+0,253	+0,040
50	+ 0019	--- 0000	0,110	+0,173	0,000
40	--- 0003	--- 0002	0,112	---0,027	---0,018
30	--- 0008	--- 0002	0,159	---0,050	---0,013
20	+ 0002	+ 0006	0,186	+0,011	+0,032
-10	+ 0007	+ 0007	0,188	+0,037	+0,037
0	+ 0000	+ 0000	0,168	+0,000	0,000
+ 10	+ 0009	+ 0043	0,106	+0,085	+0,406
20	+ 0014	+ 0018	0,041	+0,341	+0,439
30	+ 0006	+ 0016	0,043	+0,140	+0,372
40	--- 0022	+ 0025	0,099	---0,222	+0,253
50	--- 0003	+ 0036	0,137	---0,022	+0,263
60	--- 0005	+ 0049	0,150	---0,033	+0,327
70	--- 0008	+ 0058	0,142	---0,056	+0,408
80	--- 0010	+ 0065	0,123	---0,081	+0,528
90	--- 0009	+ 0062	0,119	---0,076	+0,521
+100	---0,0003	+0,0046	0,0146	---0,021	+0,315

Ces trois séries de valeurs. [*Leverrier* $e(L)$, *Stockwell* $e(S)$, et *Michkovitch* $e(M)$] sont représentées aussi graphiquement (voir fig. 1) en prenant pour abscisse le temps (avec dix mille ans comme unité) et pour ordonnée l'excentricité correspondante (avec $1 \text{ mm} = 0.008$).

La simple inspection de cette figure permet, à mon avis, de tirer certaines conclusions non sans importance, tant au point de vue des calculs relatifs aux inégalités séculaires qu'au point

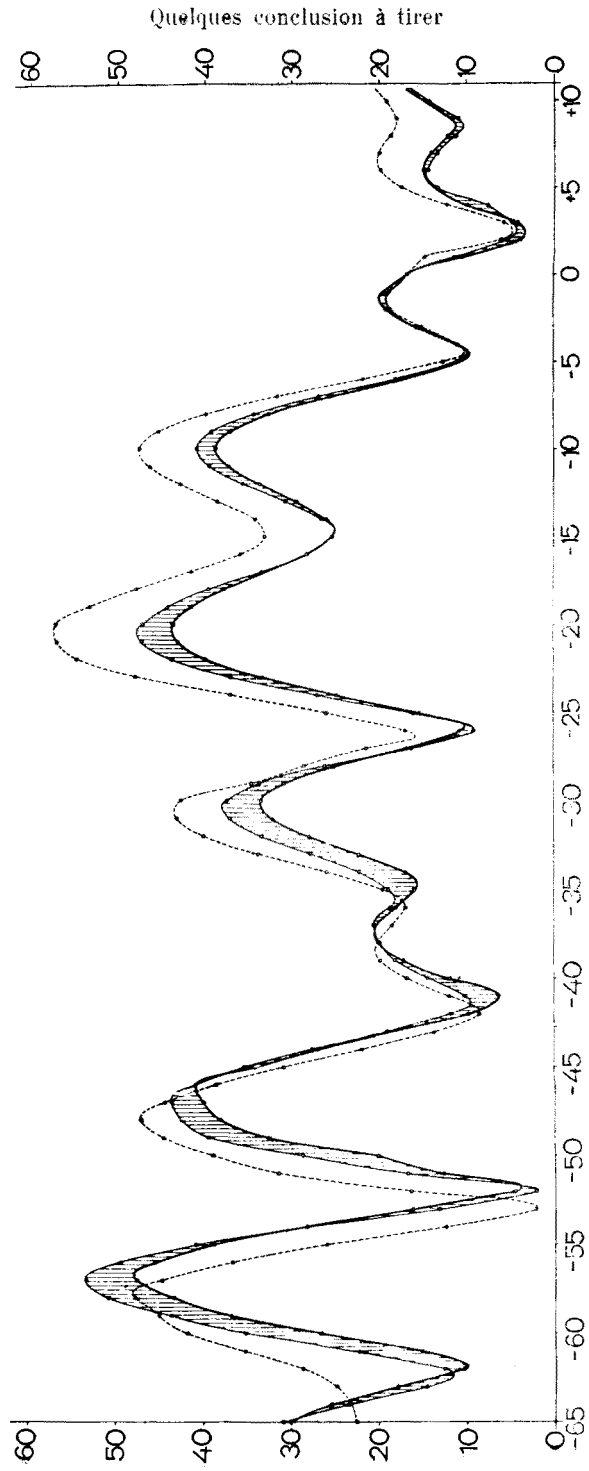


Fig. 1

de vue des résultats que la nouvelle théorie du climat mathématique de la Terre et de ses fluctuations peut en tirer.

D'abord on voit que, dans le laps de temps considéré et aux termes du premier ordre près quant aux masses et leurs corrections, les valeurs des inégalités séculaires de l'excentricité se rangent, dans les trois évaluations, suivant des courbes accusant sensiblement les mêmes oscillations.

Les courbes tracées, l'une des $e(L)$ -en pointillé et l'autre des $e(M)$ -à gros trait, ayant été obtenues en partant des mêmes constantes initiales et formules, en corrigeant pour avoir la seconde courbe les valeurs primitives des masses planétaires, font ressortir l'effet produit par les corrections seules des masses. Cet effet se manifeste par les différences, plus ou moins grandes, des valeurs des excentricités, ainsi que par les décalages des époques des maxima et minima, nuls au voisinage de l'époque initiale, puis allant en croissant irrégulièrement, les extrema de *Leverrier* précédant généralement ceux de *Michkovitch*.

Les écarts entre les courbes de $e(S)$, à trait fin, et des $e(M)$, à gros trait, représentent l'effet global et de l'action supplémentaire de la planète Neptune et des corrections des masses planétaires. Ses caractéristiques ressemblent beaucoup aux précédentes: les valeurs des excentricités d'après *Stockwell* sont dans presque tout l'intervalle légèrement supérieures et les époques de maxima et minima tombent presque toujours un peu en avant par rapport à celles de *Michkovitch*. En tenant compte du rapport des corrections des masses appliquées, on voit, d'après les écarts entre les deux courbes, que, contrairement à l'affirmation de *Stockwell*, l'action de la planète Neptune n'a guère modifié l'aspect de la courbe des variations séculaires.

Enfin, toujours du point de vue de l'application qu'on allait faire de ces nombres, j'ai cherché à voir encore, à titre de contrôle, les écarts que les nouvelles valeurs pouvaient donner, par rapport à celles de *Stockwell*, pour les différences (Δ =été—hiver) entre les durées des saisons, estivales et hivernales, dans l'année, relatives à notre planète, au cours des 100.000 ans antérieurs à 1850 (1800).

On sait que, en partant de la seconde loi de Kepler, on

arrive, après quelques transformations connues, pour cette différence, à l'expression :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{8T}{\pi} e \sin(\gamma - \varpi), \\ &= \frac{8T}{\pi} [\sin \gamma (e \cos \varpi) - \cos \gamma (e \sin \varpi)] \end{aligned}$$

où $T=182,62$ jours, e est l'excentricité de l'orbite de la Terre, $\gamma=180^\circ-50''\cdot 235$ ($t-1800$) et ϖ la longitude du périhélie.

En portant dans le second membre de la dernière équation les valeurs relatives aux inégalités séculaires

$$\begin{aligned} e \sin \varpi &= \sum M_h \sin(g_h t - \beta_h) \\ e \cos \varpi &= \sum M_h \cos(g_h t - \beta_h), \end{aligned}$$

on trouve :

$$\Delta = \frac{8T}{\pi} \sum M_h \sin(\gamma - g_h t - \beta_h),$$

où par M_h , g_h et β_h on a désigné les quantités qui déterminent les variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie.

Si l'on calcule maintenant les valeurs de Δ de 5.000 en 5.000 ans, d'une part, à l'aide des variations séculaires de *Stockwell* $\Delta(S)$, d'autre part, à l'aide de nos valeurs, $\Delta(M)$, on trouve pour les 100.000 ans antérieurs à 1800, les nombres réunis dans le tableau (p. 218)

La conclusion finale que je crois pouvoir tirer de ces comparaisons qualitatives des diverses évaluations des inégalités séculaires des éléments orbitaux de la Terre, peut être ainsi résumée. Dans l'état actuel de nos connaissances, tant du nombre de planètes que des valeurs de leurs masses respectives, nous ne pouvons guère prétendre à un degré d'exactitude beaucoup supérieur à celui que comportent les valeurs de inégalités séculaires des éléments orbitaux de la Terre calculées dernièrement (*Michkovitch*). Ni les planètes nouvelles, telles que Pluton et les suivantes, à cause de leur faible action, ni les

Millénaire av. 1850	$\Delta(S)$	$\Delta(M)$	Millénaire av. 1850	$\Delta(S)$	$\Delta(M)$
— 100	— 0.5	— 1.4	— 50	+ 4.0	+ 4.4
— 95	+ 18.4	+ 17.1	— 45	+ 4.0	+ 4.3
— 90	+ 5.4	+ 6.3	— 40	+ 0.4	+ 0.4
— 85	— 15.1	— 14.2	— 35	— 5.7	— 5.7
— 80	— 8.8	— 9.3	— 30	— 4.7	— 4.6
— 75	+ 10.5	+ 9.0	— 25	+ 5.4	+ 4.3
— 70	+ 9.4	+ 9.8	— 20	+ 7.4	+ 7.3
— 65	— 4.6	— 2.9	— 15	— 4.0	— 3.4
— 60	— 7.8	— 8.0	— 10	— 8.4	— 9.9
— 55	+ 0.7	0.0	— 5	+ 2.2	+ 1.5
			0	+ 7.7	+ 7.4

nouvelles corrections des masses planétaires, allant constamment en diminuant, ne pourront plus changer notablement l'allure des variations en question, — tant que l'étendue de l'intervalle de temps reste en rapport avec la précision des données numériques initiales.

On ne peut donc s'attendre à un changement sensible de l'aspect de ces courbes qu'en poussant l'approximation aux termes d'ordres plus élevés dans les séries qui déterminent les variations.
