Un théorème sur le procédé de sommabilité de Borel

Par

J. KARAMATA

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes, sommable-B (Borel), vers la somme généralisée s:

$$e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n!}\,\omega^n \to s\,, \qquad \omega\to\infty\,, \tag{1}$$

où

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n}u_\nu\,.$$

Dans ce cas la série $o+u_n+u_1+u_2+\cdots$ est de même sommable-B, mais il n'en est pas de même pour la série $u_1+u_2+\cdots$. En d'autres termes, de (1) il résulte que

$$e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{n-1}}{n!}\,\omega^n=e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{(n+1)!}\,\omega^{n+1}\to s\,, \qquad \omega\to\infty\,, \tag{2}$$

mais il n'en résulte pas nécéssairement que

$$e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{n!}\,\omega^n=e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n-1)!}\,\omega^{n-1}\to s\,, \qquad \omega\to\infty\,. \tag{3}$$

Pour qu'on puisse affirmer que cette dernière relation a de même lieu, il faut assujettir la suite s_n à certaines conditions restrictives. Ainsi, V. Garten a montré (Über den Einfluss endlich vieler Änderungen auf das Borelsche Limitierungsverfahren. Math. Zeit. **40** (1936), 756—759) que (3) résulte de (1) toutes les fois que la suite s_n ne croît pas trop vite; plus précisement toutes les fois qu'il existe un entier positif k tel que

$$(4) \qquad s_n = O(n^k), \qquad n \to \infty.$$

Je veux montrer ici qu'on peut obtenir ce resultat par des considérations semblables à celles données dans ma Note „Über die B-Limitierbarkeit einer Potenzreihe am Rande" (Math. Zeit. sous presse).

Dans ce but, posons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty}{}' s_n z^n ,$$

et remarquons d'abord que

$$(5) \qquad (1-z)^{2k+1} f(z) = (1-z)^{2k+2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

reste borné dans le cercle $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ lorsque s_n satisfait à la condition (4).

En effet, d'après (4) on peut supposer que

$$|s_n| < M \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!} \quad \text{pour tout } n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Donc, pour tout z du cercle $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, c. à d. pour tout z de la forme

$$(6) \qquad z = \frac{1}{1+\varepsilon+it} \quad \text{avec } \varepsilon > 0 \text{ et } -\infty < t < +\infty ,$$

on a

$$|1-z|^{2k+1} |f(z)| < M |1-z|^{2k+2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!} |z|^n =$$

$$< M \left(\frac{|1-z|^2}{1-|z|} \right)^{k+1} = M \left\{ (1+|z|) \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \right\}^{k+1} =$$

$$< M (1+|z|)^{k+1} \left(\frac{\varepsilon^2+t^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2+t^2} \right)^{k+1},$$

donc

$$(7) \qquad |1-z|^{2k+1} |f(z)| < 2^{k+1} M .$$

Ceci établit, posons dans (5) sans restreindre la généralité $s_0=0$, prenons z sous la forme (6), multiplions les deux nombres par

$$\frac{1}{2\pi} e^{\omega t i}$$

et intégrons par rapport à t de $-\infty$ à $+\infty$; l'on obtient ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i}(1-z)^{2k+1} f(z) dt = \sum_{\nu=0}^{2k+2}(-1)^{\nu}\binom{2k+2}{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n z^{n+\nu} e^{\omega t i} dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2k+2}(-1)^{\nu}\binom{2k+2}{\nu}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{e^{\omega t i}}{(1+\varepsilon+it)^{n+\nu}} dt.$$

En tenant compte de la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\omega t i}}{(a+it)^m} dt = e^{-a\omega}\frac{\omega^{m-1}}{(m-1)!} \quad \text{pour} \quad \omega>0 \quad \text{et} \quad m \geqslant 1,$$

due à Laplace (Theorie analytique des probabilités, Paris 1814, p. 471) et Poisson (Journal de l'Ecole polytechnique, 1823, p. 481) et en remarquant qu'il est permis d'intégrer la série précédante terme à terme, l'on en tire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t i}(1-z)^{2k+1} f(z)\, dt =$$

$$= e^{-\varepsilon\omega}\sum_{\nu=0}^{2k+2}(-1)^{\nu}\binom{2k+2}{\nu} e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n+\nu-1)!}\omega^{n+\nu-1}.$$

D'après (7) la fonction (5) reste bornée lorsque $\varepsilon \to 0$ dans $z=\dfrac{1}{1+\varepsilon+it}$; on peut donc effectuer ce passage à la limite sous le signe intégrale et l'on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{it}{1+it}\right)^{2k+1} f\left(\frac{1}{1+it}\right) e^{\omega t i} dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2k+2}(-1)^{\nu}\binom{2k+2}{\nu} e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n+\nu-1)!}\omega^{n+\nu-1}.$$

Dans cette relation le membre gauche tend vers 0 lorsque $\omega \to \infty$ comme coéfficient de Fourier, vu que la fonction $f\left(\frac{1}{1+it}\right)-\frac{s_1}{1+it}$ est absolument intégrable dans $(-\infty, +\infty)$, donc

$$\sum_{\nu=0}^{2+2}(-1)^\nu\binom{2k+2}{\nu}e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n+\nu-1)!}\omega^{n+\nu-1}\to 0, \quad \omega\to\infty .$$

Or, d'après l'hypothèse (1) et la remarque faite au debut il résulte que

$$e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n+\nu-1)!}\omega^{n+\nu-1}\to s, \qquad \omega\to\infty$$

pour tout $\nu=1, 2, 3, \cdots$. Donc,

$$e^{-\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{(n-1)!}\omega^{n-1}\to - s\sum_{\nu=1}^{2k+2}(-1)^\nu\binom{2k+2}{\nu}=s\ , \quad \omega\to\infty ,$$

qui donne l'affirmation (3).

Remarquons à la fin que dans le cas où les termes de la suite s_n sont réels, on peut remplacer la condition (4) par la plus générale:

$$s_n > O(n^k)\ , \quad n\to\infty .$$

Car, de cette condition et du fait que

$$e^{-\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{n!}\omega^n < M\ ,$$

il résulte

$$s_n < O(n^{k+1/2})\ , \quad n\to\infty\ .$$

En effet, l'hypothèse $s_n > O(n^k)$ peut être remplacée par

$$s_n > -M'n(n-1)\cdots(n-k+1) \quad \text{pour tout} \quad n=k, k+1\cdots$$

et l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer que $s_n=0$ pour tout $n=0, 1, 2, \cdots, k-1$.

Par suite

$$M > e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!}\,\omega^n = e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n + M' n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}\,\omega^n - M'\,\omega^k$$

$$> e^{-\omega}\,\frac{s_n + M' n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}\,\omega^n - M'\,\omega^k,$$

c. à d pour $\omega = n$,

$$s_n < M'\,\{n^{k-n}\,e^n\,n! - n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\} + M\,n^{-n}\,e^n\,n!$$

$$< O\,(n^{k+\frac{1}{2}}),\; n \to \infty,$$

qui démontre l'affirmation.