

## Remarques sur les liaisons entre certaines représentations géométriques

Par

W. JARDETZKY

Suivant les questions les représentations géométriques varient. Ainsi, par exemple, à l'ensemble de six quantités scalaires on fait correspondre: 1) un point dans l'espace à six dimensions, 2) deux vecteurs dans l'espace à trois dimensions ou 3) un ellipsoïde dans le même espace.

Dans l'étude de certaines questions, peut être, pourrait rendre service l'introduction des diverses représentations géométriques, et nous ferons dans cette note quelques remarques sur les notions géométriques qui sont déjà ou peuvent être rattachées à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons d'abord un champ vectoriel dans l'espace à trois dimensions. Soient  $\vec{r}(x, y, z)$  le vecteur dont l'extrémité est le point  $M$  et  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  un vecteur lié à ce point. On a, en outre,  $v_x = v_x(x, y, z)$ ,  $v_y = v_y(x, y, z)$ ,  $v_z = v_z(x, y, z)$ . Or, nous pouvons en même temps étudier le champ des directions correspondantes, c'est-à-dire le champ des vecteurs-unités  $\vec{v}_0(l, m, n)$ ;  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Cela posé, considérons un plan passant par le point  $M$

$$(1) \quad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

L'ensemble de cinq nombres

$$(2) \quad x, y, z, p, q$$

s'appelle, d'après S. Lie, un élément de contact. Nous aurons, évidemment, les relations

$$(3) \quad p=kl, \quad q=km, \quad -1=kn; \quad k=\sqrt{1+p^2+q^2},$$

si le plan est normal au vecteur  $\vec{v}$  considéré plus haut.

Ainsi l'ensemble de cinq nombres (2) est représenté géométriquement par l'ensemble des deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{v}_0$  (ou  $k\vec{v}_0$  ( $p, q, -1$ )), c'est-à-dire par le champ des vecteurs-unités  $\vec{v}_0$  lorsque ces nombres varient. Nous pouvons donc nommer cet ensemble des vecteurs „un élément“.

Le système d'éléments est, d'après S. Lie, l'ensemble d'éléments vérifiant la relation

$$(4) \quad F(x, y, z, p, q)=0.$$

Les éléments sont unis, lorsque ils sont assujettis à la condition

$$(5) \quad dz=p dx+q dy,$$

c'est-à-dire, à la condition d'orthogonalité

$$(6) \quad (\vec{dr}, \vec{v}_0)=0 \quad \text{ou} \quad (\vec{dr}, \vec{v})=0,$$

où par les parenthèses est désigné le produit scalaire de deux vecteurs.

D'autre part la recherche des lignes de champ nous conduit à l'équation

$$\vec{dr} = a\vec{v},$$

où  $a$  est un scalaire, ou à la condition

$$(7) \quad [\vec{dr}, \vec{v}]=0.$$

Ce produit vectoriel dans le cas de l'espace à  $n > 3$  dimensions devient un tenseur. Les équations (6) et (7) montrent

que les lignes de champ et les caractéristiques forment deux familles des courbes orthogonales.

Il est plus naturel de s'en servir de la deuxième des représentations géométriques mentionnées plus haut pour interpréter quelques résultats de la théorie d'intégration des équations aux dérivées partielles.

Il est bien connu<sup>1)</sup> que les différentes solutions de l'équation aux différentielles totales

$$(8) \quad dz = \sum_{s=1}^n p_s dx_s$$

peuvent être représentées sous la forme suivante, donnée par S. Lie :

$$(9) \quad \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-\varrho}, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ x_{n-\varrho+i} &= \varphi_i(x_1, \dots, x_{n-\varrho}, C_1, \dots, C_n), \quad i=1, 2, \dots, \varrho; \end{aligned}$$

$$p_k = \psi_k, \quad k=1, 2, \dots, n-\varrho,$$

$$(10) \quad \psi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{\varrho} p_{n-\varrho+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

où on a  $2n+1$  variables  $x_i, z, p_i$  et  $n$  constantes arbitraires  $C_i$ .

L'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point est un élément de contact de l'espace à  $n+1$  dimensions<sup>2)</sup>. Or, cet élément est aussi représenté par l'ensemble de deux vecteurs

$$(11) \quad \vec{r}(x_1, \dots, x_n, z) \quad \text{et} \quad \vec{p}(p_1, \dots, p_n, -1).$$

Le second étant une fonction de point, l'espace envisagé sera donc le champ vectoriel  $\vec{p}$ . L'équation (8) sera de nouveau la condition d'orthogonalité

$$(12) \quad (\vec{p} \, dr) = 0.$$

<sup>1)</sup> Voir p. e. *N. Saltzykov* Méth. class. d'intégr. d. équations aux dér. part. du premier ordre. Mémoires d. sc. mathém. L. p. 51.

<sup>2)</sup> *E. Goursat*. Leçons sur l'intégration des équations aux dér. part. du pr. ordre. p. 316. 1921.

A chaque ensemble des valeurs des constantes  $C_i$  correspond un ensemble des  $q+1$  surfaces (9).

Posons

$$(13) \quad \varphi - z = U, \quad \varphi_i - x_{n-q+i} = U_i.$$

Dans le champ de chaque scalaire  $U, U_i$  on peut définir le gradient:

$$(14) \quad \begin{aligned} \text{grad } U & \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-q}}, 0, \dots, 0, -1 \right), \\ \text{grad } U_i & \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-q}}, \underbrace{0, \dots, -1}_{i}, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

En complétant le système des égalités (10) par les identités

$$p_{n-q+i} = -p_{n-q+i}(-1), \quad i=1, 2, \dots, q,$$

nous pouvons écrire l'équation vectorielle correspondante:

$$(15) \quad \vec{p} = \text{grad } U - \sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \text{grad } U_i.$$

Le vecteur  $\vec{p}$  doit donc être une fonction linéaire des gradients (14).

Si  $q=0$ , on a

$$(16) \quad \vec{p} = \text{grad } U$$

et, d'après l'égalité (12),

$$(17) \quad (d\vec{r} \text{ grad } U) = dU = 0.$$

D'où

$$(18) \quad U = \varphi - z = \text{const.}$$

Dans le cas  $q \neq 0$ , on aura

$$(19) \quad \begin{aligned} (\vec{dr} \text{ grad } U) - \sum_{i=1}^{\varrho} p_{n-\varrho+i} (\vec{dr} \text{ grad } U_i) = \\ dU - \sum_{i=1}^{\varrho} p_{n-\varrho+i} dU_i = 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc que

$$(20) \quad \varphi - z = U = \text{const.}, \quad \varphi_i - x_{n-\varrho+i} = U_i = \text{const.}$$

On obtient donc l'interprétation suivante des solutions (9—10) de l'équation (8) : dans le cas  $\varrho=0$  le vecteur  $\vec{p}$  (11—16) a la direction de la normale à la surface (9), dans le cas  $\varrho \neq 0$  il est la somme géométrique de  $\varrho+1$  vecteurs qui ont les directions des normales à des surfaces (9).

Dans le cas générale le vecteur  $p$  est une fonction des  $n+1$  variables  $x_1, \dots, x_n, z$ . Cherchons dans quels cas l'équations aux différentielles totales (8) ou (12) admet un facteur intégrant  $\psi$ . On a

$$(21) \quad (\psi \vec{p} \vec{dr}) = dV = (\vec{dr} \text{ grad } V) = 0.$$

D'où

$$\psi \vec{p} = \text{grad } V$$

et

$$\text{rot } \psi \vec{p} = \text{rot grad } V = 0.$$

En developant cette expression on a

$$(22) \quad \psi \text{rot } \vec{p} + [\text{grad } \psi, \vec{p}] = 0.$$

Dans le cas de l'espace à trois dimensions on en déduit la relation<sup>3)</sup>

$$(23) \quad (\vec{p} \text{ rot } \vec{p}) = 0.$$

<sup>3)</sup>  $X, Y, Z$  étant les composantes de  $\vec{p}$  on aura

$$X \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + Y \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + Z \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0.$$

On voit que l'orthogonalité des vecteurs joue ici de même un rôle.

Dans ce qui suit nous bornons par le cas où  $p_i$  ne dépendent que de  $x_1, \dots, x_n$ . Alors on aura la condition d'intégrabilité de l'équation (8) sous la forme

$$(24) \quad \text{rot } \vec{p} = 0 ,$$

et dans le cas de l'espace à  $n+1$  dimensions  $(x_1, \dots, x_n, z)$  le rotationnel sera un tenseur

$$(25) \quad \Phi \equiv \text{rot } \vec{p}$$

dont les composantes sont

$$(26) \quad D_{s\sigma} = \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial p_\sigma}{\partial x_s} .$$

Les relations

$$(27) \quad D_{s\sigma} = 0 \quad (s, \sigma = 1, 2, \dots, n+1; p_{n+1} = -1, x_{n+1} = z)$$

seront donc les conditions d'intégrabilité de l'équation (12).

Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles

$$(28) \quad F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$$

En adjoignant<sup>4)</sup> à cette équation les équations

$$(29) \quad F_k(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = C_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

on obtient par différentiation les relations

$$(30) \quad (F_i F_k) + \sum_{s=1}^n \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_\sigma} D_{s\sigma} = 0$$

où  $(F_i F_k)$  sont les parenthèses de Poisson. Les fonctions  $F, F_1, \dots, F_{n-1}$  sont dites en involution, lorsque

$$(31) \quad (F_i F_k) = 0 .$$

<sup>4)</sup> Voir p. e. N. Saltzykow l. c. p. p. 19–21.

En tenant compte des relations (30) et (27) on voit la liaison étroite entre les conditions (24) et (31). Ainsi, la propriété des fonctions  $F_i$  d'être en involution s'exprime par le fait que les composantes  $p_s$  données par le système d'équations (28—29) correspondent à un vecteur  $\vec{p}$  assujetti à la condition  $\Phi = \text{rot } \vec{p} = 0$ .

L'ensemble des équations (28—29) est d'après la définition connue, un élément intégral régulier. Donc cet élément est représenté par un vecteur  $\vec{p}$  dont le rotationnel s'annule.

Nous nous bornons par ce qui précède en remarquant que certaines autres notions de la théorie des vecteurs peuvent être aussi rattachées aux questions mentionnées plus haut.

---