Démonstration d'existence des intégrales d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue

Par

M. N. SALTYKOW

I. Introduction

Les démonstrations connues établissent l'existence local des intégrales en question dans le domaine d'un point, sans étudier ordinairement l'étendue de ce dernier. On démontre ensuite les moyens de calculer les valeurs de l'intégrale considérée aux points de voisinage par la méthode de prolongement analytique.

Il s'agit dans le présent travail d'apporter quelques simplifications dans la démonstration que l'auteur avait donné au t. XXXI. p. 224, du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, concernant un système complet de m équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.

C'est toujours deux questions qui se posent, en abordant le problème considéré, par le moyen des fonctions majorantes, ou par le calcul des limites, d'après la terminologie de Cauchy. D'abord c'est le choix qui intervient de l'expression de la fonction majorante et, ensuite, l'intégration de l'équation de comparaison. M. M. Petrovitch vient de montrer, dans son remarquable travail, *Equations de comparaison dans la théorie des équations différentielles*[1]), les différentes expressions que l'on peut

[1]) Comptes rendus du premier Congrès des mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa 1930. p. 129.

attribuer à la fonction majorante. Deux de leurs types fondamentaux, celui de Cauchy et l'autre de Weierstrass, jouissent des propriétés toutes différentes. Les fonctions majorantes de Cauchy présentent l'avantage très important, c'est de ne point introduire, pour la variation des variables, des limitations, outre celles qui sont assignées par les équations différentielles considérées elles-mêmes. Si de nouvelles limitations s'y interposent, ce n'est que grâce aux méthodes d'intégration des équations de comparaison. L'exemple classique se trouve dans la démonstration de Briot et Bouquet pour l'existence de l'intégrale des équations différentielles ordinaires.

Quant à la fonction majorante de Weierstrass, elle introduit, grâce à sa forme même, des restrictions du domaine de variation des variables. Néanmoins la fonction Weierstrassienne s'impose parfois, en permettant d'intégrer les équations de comparaison. L'exemple se trouve dans le Mémoire de N. Saltykow, cité plus haut *du Bulletin de la Société Mathématique de France.* Pour y rendre compatibles les équations aux dérivées partielles du système de comparaison, il a fallu introduire la fonction majorante du type de Weierstrasse, afin que les conditions d'involution soient vérifiées.

II. Equations à deux variables indépendantes.

Considérons l'équation

$$p = H(x, y, z, q)\,, \tag{1}$$

la fonction H étant holomorphe dans le voisinage des valeurs zéro de toutes les quantités

$$x, y, z, q\,, \tag{2}$$

considérées comme les variables indépendantes. Ce domaine est déterminé, pour la variable x, par la circonférence de cercle du rayon a, et pour chacune des autres variables (2), par les circonférences de cercle du rayon b, décrites autour des origines des coordonnées, comme centres, dans les plans de ces variables. Soit M la borne supérieure de $|H|$ dans ce domaine.

Etudions, dans ce dernier domaine, l'existence de l'intégrale de Cauchy s'annulant, ainsi que sa dérivée paramétrique, pour la valeur initiale de la variable principale.

Prenons l'équation de comparaison à fonction majorante mixte, de Cauchy-Weierstrass:

$$P = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y + Z + Q}{b}\right)}, \tag{3}$$

P et Q désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction de comparaison Z prises respectivement par rapport aux variables indépendantes x et y.

Au lieu de transformer l'équation (3) en une équation linéaire, comme nous l'avions fait dans le Mémoire cité du *Bulletin*, introduisons la nouvelle fonction inconnue U qui est liée, avec l'ancienne Z, par la relation:

$$y + Z = Ue^{-y}. \tag{4}$$

Les formules de transformation étant

$$P = e^{-y}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = e^{-y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - U\right) - 1,$$

l'équation (3) transformée prend la forme

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Me^{y}}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{e^{-y}\frac{\partial U}{\partial y} - 1}{b}\right)}$$

et s'intègre immédiatement par la séparation des variables. Posons à ce fait:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{MC}{1 - \frac{x}{a}}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = (1 + b)\,e^{y} - \frac{b}{C}\,e^{2y},$$

C désignant une constante arbitraire.

L'intégrale complète de l'équation primitive (3) dévient, grâce à la formule (4):

$$Z = 1 + b - y - \frac{be^y}{2C} - a\,MC\,e^{-y} \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C' e^{-y},$$

C' désignant la seconde constante arbitraire.

Il s'ensuit que l'intégrale générale de l'équation (3) sera représentée par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & Z = 1 + b - y - \frac{be^y}{2C} - a\,MC\,e^{-y} \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) + e^{-y} f(C), \\ & \frac{be^y}{2C^2} - a\,MC\,e^{-y} \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) + e^{-y} f'(C) = 0 , \end{aligned} \right.$$

f désignant une fonction arbitraire du paramètre variable C.

Grâce à la seconde équation (6), la dérivée Q devient:

$$(7)\qquad Q = -1 - \frac{be^y}{2C} + a\,MC\,e^{-y} \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) - e^{-y} f(C).$$

Cela posé, introduisant les valeurs initiales $x = 0$, $Z = 0$, $Q = 0$, la première équation (6) et la (7)-ième prennent la forme suivante, en désignant v la valeur correspondante du paramètre C:

$$1 + b - y - \frac{be^y}{2v} + e^{-y} f(v) = 0,$$

$$1 + \frac{be^y}{2v} + e^{-y} f(v) = 0 .$$

Formant respectivement la somme et la différence de ces deux dernières équations, on en tire immédiatement les expressions suivantes:

$$(8)\qquad f(v) = \frac{1}{2}(y - b - 2)\, e^y,$$

$$(9)\qquad v = \frac{be^y}{b - y} .$$

D'abord, il est évident qu'en calculant la derivée $f(v)$ de l'équation (8), considérant y, grâce à l'équation (9), comme fonction de v, on retrouve la même expression qui résulte de la seconde formule (6), pour les valeurs initiales des variables. Cela étant, l'équation (9) définie y comme fonction de v, en vertu de l'équation implicite :

$$y = b\left(1 - \frac{e^{v}}{v}\right). \tag{10}$$

En effet, l'équation (10), pour $v = 1$, donne $y = 0$, la valeur correspondante de la dérivée $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_1 = \frac{b}{1+b}$ étant distincte de zéro. La théorie des fonctions implicites démontre que l'équation (10) définie une fonction bien déterminée y de v, tant qu' ayant $|y| < b$, la variable v reste dans l'intervalle bien défini $(-a, +a)$. Par conséquent, la formule (8) détermine, dans le même domaine, la fonction $f(v)$. Il s'ensuit, donc, qu'en substituant la valeur de cette dernière fonction en l'intégrale (6), l'existence de l'intégrale réquise de l'équation (1), est démontrée, dans la région correspondante du domaine, où la fonction H est holomorphe.

III. Système d'équations à plusieurs variables indépendantes

Considérons le système complet des m équations

$$\left\{\begin{array}{l} p_k = H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n), \\ (k = 1, 2, \ldots, m), \end{array}\right. \tag{1}$$

les variables p_s, $(s = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, n)$ désignant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue z prises respectivement par rapport à la variable indépendante x_s.

Supposons que les fonctions H_k soient holomorphes, par rapport à toutes les variables

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ p_{m+2}, \ldots p_n \tag{2}$$

considérées comme indépendantes, dans un certain domaine de leur variation.

Désignons y par a le rayon des cercles decrites autour des origines des coordonnées, comme centres, dans les plans des variables indépendantes principales

$$(3) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

Soit b, dans le même domaine, le rayon des cercles correspondants à toutes les autres variables (2), à l'exception des variables (3) Enfin, désignons par M la borne supérieure de toutes les quantités $|H_1|, |H_2|, \ldots |H_m|$.

Il est aisé de former le système de comparaison suivant

$$(4) \quad P_k = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{a}\right)\left(1 - \frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n + Z + P_{m+1} + \cdots P_n}{b}\right)},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

Z désignant la fonction de comparaison et les $P_1, P_2, \ldots, P_m$, $P_{m+1}, \ldots P_n$ les dérivées du premier ordre de cette dernière, prises respectivement par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Les équations (4) sont bien compatibles, car elles peuvent être intégrées simultanement. Remplaçons, dans ce but, les $m-1$ dernières équations (4) par les suivantes

$$P_{i+1} - P_1 = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots m-1).$$

L'intégrale générale de ce dernier système linéaire se présente sous la forme:

$$Z = U(x, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n),$$

où l'on a posé

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m,$$

U désignant la nouvelle fonction inconue.

Cela étant, la première équation du système (4) devient:

$$(5) \quad Q = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n + U + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n-m}}{b}\right)}.$$

L'intégrale générale du système (4) sera, donc, définie par celle de cette dernière équation (5).

Or, il est aisé de chercher l'intégrale de l'équation (5) sous la forme

$$U = V(x, y \quad),$$

en introduisant la désignation:

$$y = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n .$$

L'équation (5) sera alors remplacée par la suivante:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left[1 - \frac{y + V + (1-m)\frac{\partial V}{\partial y}}{b}\right]} . \tag{6}$$

Enfin, posant

$$y + V = e^{-\frac{y}{n-m}} W,$$

où W représente la nouvelle fonction inconnue, l'équation (6) deviendra:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{M e^{-\frac{y}{n-m}}}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left[1 - \frac{(n-m)\left(e^{-\frac{y}{n-m}}\frac{\partial W}{\partial y} - 1\right)}{b}\right]} .$$

Il résulte de cette dernière équation, grâce au procédé de la séparation des variables:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{MC}{1 - \frac{x}{v}} , \\ &(n-m)\frac{\partial W}{\partial y} = \left(b + n - m - \frac{b}{C} e^{\frac{y}{n-m}}\right) e^{\frac{y}{n-m}} , \end{aligned}\right. \tag{7}$$

C désignant une constante arbitraire.

En posant:

$$\frac{n-m}{y} = y_1, \quad b+n-m-1 = b_1, \quad \frac{b}{C} = \frac{b_1}{C_1}, \quad MC = M_1C_1,$$

les formules (7) deviennent:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{M_1C_1}{1-\frac{x}{a}}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_1} = (1+b_1)e^{y_1} - \frac{b_1}{C_1}e^{2y_1}.$$

Or, les formules obtenues sont analogues à celles qui ont servi, à la partiè II de ce travail, pour définir la fonction U. Par conséquent, on en tire immédiatement la démonstration de l'existence de l'intégrale requise de Cauchy pour le système d'équations étudiées (1).

IV. Existence unique des intégrales de Cauchy

Les modifications de la démonstration d'existence de l'intégrale de Cauchy que l'on vient d'exposer, n'influent nullement sur la démonstration de l'unicité de l'intégrale en question, donnée au *Bulletin* anterieurement cité. Donc, cette dernière reste en vigueur, généralisant la démonstration de M. E. Picard qu'il avait donné pour les équations différentielles ordinaires, dans son *Traité d'Analyse*, t. II, p. 314. nº 14.