Sur les subdivisions des polyèdres réguliers en polyèders réguliers

Par

M. HENRI LEBESGUE

M. Michel Petrovitch s'est assez souvent plu à poursuivre ses investigations mathématiques hors des chemins battus pour que je puisse le prier d'accepter en hommage quelques remarques sur un ordre de questions que les géomètres envisagenrarement.

1. — On connait quelques subdivisions des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers; par exemple, partageons en deux parties égales chacune des arêtes d'un tétraèdre, hexaèdre ou octaèdre régulier et, par les points de subdivision, menons des plans parallèles aux faces. Nous avons subdivisé le tétraèdre en quatre tétraèdres et un octaèdre, le cube en huit cubes, l'octaèdre en six octaèdres et huit tétraèdres. On va voir que toute subdivision d'un polyèdre régulier en polyèdres réguliers se rattache étroitement à ces exemples.

Ceux-ci sont en liaison avec deux pavages connus de l'espace. Le premier est constitué par tous les cubes de côté 1 et dont les sommets ont pour coordonnées rectangulaires x_1, y_1, z_1, des nombres entiers; leurs faces sont parallèles aux plans coordonnés. Le second est constitué par tous les tétraèdres réguliers et octaèdres réguliers d'arête égale à 1, ayant trois direct tions de faces parallèles aux plans coordonnés, dont les sommets ont des coordonnées x_2, y_2, z_2, entiéres; les axes étant, cette fois, trois arêtes d'un des tétraèdres. Les éléments de ces pavages, je les appellerai des atomes, pour employer un mot que fait image, mais bien entendre en n'attachant aucun sens physique à ce mot.

Le premier pavage est donc constitué par des atomes tous égaux; le second utilise deux sortes d'atomes, tétraèdriques et octaèdriques, dont les volumes sont dans le rapport de 1 à 4. Ces atomes sont les subdivisions de l'espace obtenues en menant les plans:

I) $x_1 = \text{entier}, \quad y_1 = \text{entier}, \quad z_1 = \text{entier},$

pour le premier pavage et, pour le second, les plans

II) $x_2 = \text{entier}, \quad y_2 = \text{entier}, \quad z_2 = \text{entier}, \quad x_2 + y_2 + z_2 = \text{entier}.$

Tout cube limité par des plans de la forme I, tout tétraèdre ou octaèdre limité par des plans de la forme II peut être obtenu par la réunion de certains de nos atomes; nous dirons que ce sont des molécules obtenues par l'agglomération d'atomes. L'énoncé que j'ai en vue est le suivant:

1°. — *Le tétraèdre, le cube, l'octaèdre sont les seuls polyèdres réguliers qui peuvent être subdivisés en polyèdres réguliers.*

2°. — *Un tétraèdre ne peut être divisé qu'en tétraèdres et octaèdres; un cube seulement en cubes; un octaèdre seulement en octaèdres et tétraèdres. Les faces des polyèdres partiels sont parallèles aux faces du polyèdre primitif.*

3°. — *Les subdivisions s'obtiennent en divisant toutes les arêtes du tétraèdre, hexaèdre ou octaèdre donné en un même nombre de parties égales; en menant par les points de division des plans parallèles aux faces, ce qui décompose le polyèdre donné en atomes; puis en agglomérant ces atomes en molécules.*

2. — Des remarques élémentaires permettent de constater qu'aucune somme de certains des angles dièdres t, h, o, d, i des polyèdres réguliers (tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) n'est égale ni à l'un de ces dièdres, ni à l'un de ses compléments.

Pour aller au plus court, utilisons les valeurs connues:

$$\operatorname{tg} t = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} h = \infty, \quad \operatorname{tg} o = -2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} d = -2,$$

$$\operatorname{tg} i = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

d'où il résulte

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{-4\sqrt{2}}{7},$$

pour obtenir les inégalités:

$$\pi - i < \pi - d < t = \pi - o < h = \pi - h < o = \pi - t < d < i < 2t$$

qui entrainent le fait ci dessus énoncé.

Ceci étant, supposons qu'un polyèdre régulier P soit subdivisé en polyèdres p_i eux mêmes réguliers; la remarque ci dessus montre que tous les p_i qui ont une arête portée par une arête de P sont de la même espèce que P et même lui sont homothétiques.

Tous les p_i ont des arêtes de longueurs inférieures à la longueur de l'arête de P. Toute arête AB de P est donc divisée par un sommet O, au moins, des p_i. Si F est une face de P passant par AB, O est commun aux faces f_1 et f_2 de deux p_i, toutes deux directement homothétiques de F; dans f_1, par exemple, Oa, porté par OA est homologue de BA; dans f_2, Ob, porté par OB est homologue de AB.

Si F est un pentagone, f_1 et f_2 se recouvriraient donc partiellement, ce qui est impossible. Donc *un dodécaèdre régulier ne peut être subdivisé en polyèdres réguliers.*

Si F est un carré, les seconds côtés de f_1 et f_2 issus de O sont portés par la même demi-droite, il se peut donc que les p_i couvrant les arêtes de P constituent toute la subdivision de P [1]; sinon, soit P' le ou les polyèdres obtenus en enlevant de P les p_i couvrant les arêtes de P. Les dièdres de ces polyèdres P' qui sont tournés vers l'intérieur de P' ont pour valeur $\pi - h = h$, donc les p_i qui les remplissent sont encore des cubes de faces parallèles à celles de P. En enlevant ces p_i des P' on a des polyèdres P'', sur lesquels on raisonne de même, etc., jusqu'à épuisement des p_i. Donc *un cube ne peut être subdivisé en polyèdres réguliers que si ceux-ci sont des cubes homothétiques du cube donné.*

---

1) En réalité, comme on le verrait facilement, ceci n'arrive que dans le cas de la subdivision de P en 8 p_i égaux.

Si F est un triangle, le long de la seconde arête Oc, de f_1, issue de O, le polyèdre obtenu en enlevant de P le polyèdre p_1 de face f_1 a un dièdre égal à $\pi-i$, ou $\pi-o$, ou $\pi-t$, suivant que P est un icosaèdre, un octaèdre ou un tétraèdre. En enlevant de P les p_i qui comblent les dièdres de P il reste un ou plusieurs polyèdres P' dont les dièdres tournés vers l'intérieur sont

$$\pi-i<t \quad \text{ou} \quad \pi-o=t \quad \text{ou} \quad \pi-t=o\,.$$

Dans le premier cas, ces dièdres ne peuvent donc être comblés par des p_i, donc *un icosaèdre régulier ne peut être subdivisé en polyèdres réguliers.*

Si P est un octaèdre, les dièdres $\pi-o=t$ ne peuvent être comblés que par des tétraèdres et de même si P est un tétraèdre, les dièdres $\pi-t=0$ ne peuvent être comblés que par des octaèdres. Si les p_i ainsi considérés ne donnent pas tout le polyèdre P, en enlevant ces nouveaux p_i des P' on a des polyèdres P'' dont les dièdres tournés vers l'intérieur sont ceux de P. Et, en continuant ainsi, on finira par épuiser tous les p_i. Donc *toute décomposition d'un octaèdre ou d'un tétraèdre régulier P en polyèdres réguliers est une décomposition en tétraèdres et octaèdres dont les faces sont parallèles à celles de P.*

Les deux premières parties de notre théorème sont justi fiées, examinons la troisième et d'abord pour le cas du cube.

3. — Soit une décomposition d'un cube P, d'arête 1, en cubes p_i, d'arêtes a_i. Sur trois arêtes concourrantes de P, prises pour axes Ox, Oy, Oz, projetons orthogonalement les sommets des p_i ce qui subdivise ces trois arêtes en segments de longueurs $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$; $z_1, z_2, \ldots$

Exprimons les longueurs des arêtes de P et des p_i à l'aide des x_i, y_i, z_i ; nous trouvons des relations

$$R\begin{cases} \sum x_i = \sum y_i = \sum z_i = 1 \\ a_i = \sum \varepsilon^i_k x_k = \sum \varepsilon'^i_k y_k = \sum \varepsilon''^i_k z_k\,, \end{cases}$$

dans lesquelles les ε^i_k, ε'^i_k, ε''^i_k sont égaux à zéro ou à un. De ces relations resultent d'ailleurs les expressions des x_i, y_i, z_i en fonctions des a_k

$$x_i = \sum \eta_i^k a_k, \qquad y_i = \sum \eta'^k_i a_k, \qquad z_i = \sum \eta''^k_i a_k,$$

les η, η', η'' étant égaux à zéro ou à un. Et par suite, on en déduit, par des expressions analogues (S), celles des coordonnées X_i, Y_i, Z_i des sommets des cubes p_i. Toutes ces relations (R) et (S) sont linéaires et à coefficients entiers; ajoutons y de nouvelles relations linéaires (T) si cela est nécéssaire pour obtenir par combinaison linéaire de (R), (S) (T) toute relation linéaire à coefficients entiers entre les x_i, y_i, z_i, a_i, X_i, Y_i, Z_i. Et, dans ces relations, remplaçons ces quantités par des inconnues que nous désignerons par les mêmes symboles surmontés d'un trait. Nous avons ainsi un système (E) d'équations linéaires admettant les nombres x_i, y_i, z_i, a_i, X_i, Y_i, Z_i, comme solutions. On va voir que ce système, compatible, est déterminé.

S'il ne l'était pas, ses solutions seraient données par des formules telles que:

$$\overline{x}_i = x_i + \xi_i' t_1 + \xi_i'' t_2 + \cdots,$$

à l'aide d'un certain nombre de paramètres arbitraires $t_1, t_2, \ldots$ Comme toute relation d'égalité entre deux des nombres x_i, y_i, z_i, a_i, X_i, Y_i, Z_i a lieu aussi entre les variables que nous leur avons substitués, quand les t_i seront pris assez voisins de zéro nos $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$, $\overline{z}_i$, $\overline{a}_i$, $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$ seront positifs comme les x_i, y_i, z_i, a_i, X_i, Y_i, Z_i et rangés dans le même ordre de grandeur que ces nombres. Par suite les $\overline{a}_i$ apparaitront comme les arêtes de cubes $\overline{p}_i$ en lesquels P sera divisé, ces cubes provenant de l'agglomération des parallélépipèdes en lesquels P est découpé par les plans $x = \overline{X}_i$, $y = \overline{Y}_i$, $z = \overline{Z}_i$. Ecrivons que le volume de P est la somme des volumes des $\overline{p}_i$ nous aurons une relation qui, étant vraie pour tous les t_i assez petits, sera une identité:

$$1 \equiv \sum \overline{a}_i^3 = \sum (a_i + a_i^1 t_1 + a_i^2 t_2 + \cdots)^3 =$$
$$= \sum a_i^3 + \cdots + 3 \sum a_i (a_i^1)^2 t_1^2 + \cdots$$

D'où les relations telles que

$$\sum a_i (\alpha_i^j)^2 = 0,$$

qui, puisque les a_i sont positifs, montrent que les α_i^j sont tous nuls, c'est-à-dire que les $\overline{a}_i$ sont constants et égaux a_i. Les relations

$$\overline{x}_i = \sum \eta_i^k \, \overline{a}_k$$

montrent alors que les $\overline{x}_i$ sont constants et, par les relations (S) écrites entre les $\overline{a}_i$ et $\overline{X}_i$ on voit de même que les $\overline{X}_i$ sont constants.

Le système (E) n'a donc comme solution que le système des nombres x_i, y_i, z_i, a_i, X_i, Y_i, Z_i. Mais puisque (E) est à coefficients entiers, *ces nombres sont rationnels*, c'est-à dire que la troisième partie de notre énoncé est justifiée pour le cas du cube.

4. — Le cas où P est un tétraèdre ou un octaèdre se traite de façon analogue; j'indique les petites modifications à apporter au raisonnement.

Les axes sont cette fois trois arêtes concourrantes de l'un des tétraèdres réguliers du pavage dont P est un élément. Les projections sont faites sur ces axes parallélement aux plans coordonnés; d'où les x_i, y_i, z_i, X_i, Y_i, Z_i. Nous avons à considérer deux sortes de p_i: des tétraèdres dont les arêtes seront désignées par a_i et des octaèdres dont les arêtes seront désignées par b_i. D'un système complet de relations linéaires à coefficients entiers entre les x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, X_i, Y_i, Z_i nous déduisons un système d'équations (E) entre des inconnues $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$, $\overline{z}_i$, $\overline{a}_i$, $\overline{b}_i$, $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$. Tout système de solutions de (E), voisines de x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, X_i, Y_i, Z_i, donnerait une division de P par les plans $x = \overline{X}_i$, $y = \overline{Y}_i$, $z = \overline{Z}_i$, $x+y+z = \overline{X}_i + \overline{Y}_i + \overline{Z}_i$ en parties qui, agglomérées en tétraèdres de côtés $\overline{a}_i$ et en octaèdres de côtés $\overline{b}_i$, conduirait à une identité

$$\sum \overline{a}_i^3 + 4 \sum \overline{b}_i^3 = \text{constante}.$$

La conclusion s'en suit comme précédemment; notre énoncé est entièrement justifié.