Sur une formule de M. Michel Petrovitch

Par

M. PAUL MONTEL

1. Dans une élégante Note[1]) parue en 1908, M. M. Petrovitch a obtenu, par une analyse simple et ingénieuse, des formules générales comprenant comme cas particuliers la formule de Cauchy qui donne la différence entre le nombre des zéros et celui des pôles d'une fonction méromorphe dans un cercle ainsi que la formule de Jensen relative au quotient du produit des modules des pôles par le produit des modules des zéros. M. M. Petrovitch s'est borné aux fonctions analytiques qui sont réelles sur l'axe réel.

Je me propose de reprendre ici le même problème en le traitant, soit au moyen de la théorie des résidus, soit directement et en me plaçant dans le cas d'une fonction analytique générale. Je prie M. M. Petrovitch de vouloir bien trouver, dans cette modeste contribution à l'un de ses travaux, un hommage à son oeuvre scientifique.

2. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle (C) fermé, de centre origine et de rayon r. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p$ les zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ les pôles situés dans ce cercle. On peut toujours supposer que ces points sont tous intérieurs au cercle. On doit à Cauchy la formule

[1]) Procédé élémentaire d'application des intégrales définies réelles aux équations algébriques et transcendantes (Nouvelles Annales de Mathématiques, s. 4, t. VIII, p. 1—15).

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(C)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = p-q.$$

Si l'on pose $z = re^{it}$, on a $dz = iz\,dt$ et la formule peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z f'(z)}{f(z)}\,dt = p-q.$$

Nous désignerons dorénavant par $F(z)$, l'expression $\frac{zf'}{f}$; par $\bar{z}$ le nombre conjugué de z; alors $\bar{F}(\bar{z})$ désigne le nombre conjugué de $F(z)$ et $F(\bar{z})$, le nombre déduit de $F(z)$ en remplaçant seulement la variable par sa valeur conjuguée.

Calculons maintenant les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\pm ikt} F(z)\,dt, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\pm ikt} F(\bar{z})\,dt,$$

k désignant un entier positif. La première s'écrit

$$\frac{1}{2\pi i r^k}\int_{(C)}\frac{z^k f'(z)}{f(z)}\,dz$$

en prenant le signe plus; elle représente la somme des résidus de la fonction intégrée aux pôles α_i et β_j de cette fonction; on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}F(z)\,dt = \frac{1}{r^k}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^k - \sum_{j=1}^{q}\beta_j^k\right)$$

et cette formule reste vraie pour $k=0$. Quand on prend le signe moins, il faut ajouter le pôle 0. Si l'on écrit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{z-\alpha_i} - \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{z-\beta_j} + \sum_{h=0}^{\infty} A_h z^h,$$

la dernière série représentant une fonction holomorphe dans le cercle fermé (C), on voit que les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{dz}{z^k(z-\alpha_i)}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{dz}{z^k(z-\beta_j)}$$

sont nulles puisque le résidu à l'infini est nul. Le seul terme non nul est donné par la série entière et l'on a,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} F(z)\, dz = A_{k-1}\, r^k .$$

Calculons de même:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, F(\bar{z})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{F}(z)\, dt = A_{k-1}\, r^k .$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, F(\bar{z})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{F}(z)\, dt = \frac{1}{r^k}\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^k\right).$$

On déduit des calculs précédents, en comparant les résultats:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt} F(z)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, F(\bar{z})\, dt ,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, F(z)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, F(\bar{z})\, dt ;$$

d'où

$$(1)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos kt\,[F(z) - F(\bar{z})]\, dt = 0, \\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin kt\,[F(z) + F(\bar{z})]\, dt = 0 . \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, pour $k = 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\bar{z})\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(z)+F(\bar{z})}{2}\, dt = p - q .$$

Désignons maintenant par $\varphi(t)$ une somme finie de Fourier:

$$\varphi(t)=a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+\cdots+a_n\cos nt+b_n\sin nt.$$

On déduit aussitôt des formules précédentes, en posant

$$\varphi=a_0+\varphi_1+\varphi_2,$$

φ_1 désignant la somme des sinus et φ_2 celle des cosinus,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\varphi_1+a_0)\frac{F(z)+F(\bar{z})}{2}+\varphi_2\frac{F(z)-F(\bar{z})}{2}\right]dt=a_0(p-q)$$

et, comme

$$\varphi_1=\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{2},\quad \varphi_2=\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2}-a_0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=a_0,$$

il vient

$$(2)\qquad \int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{2}+a_0\right]\frac{F(z)+F(\bar{z})}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2}-a_0\right]\frac{F(z)-F(\bar{z})}{2}\right\}dt=(p-q)\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt.$$

Cette formule est valable pour une fonction arbitraire $\varphi(t)$ de la variable t, continue dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. On peut en effet appliquer la formule à chaque somme finie de Fourier $S_n(t)$ obtenue en faisant la moyenne arithmétique des n premières sommes de la série de Fourier de $\varphi(t)$. On sait que $S_n(t)$ converge uniformément vers $\varphi(t)$ dans l'intérieur de l'intervalle $(0, 2\pi)$. La formule (2), applicable en remplaçant $\varphi(t)$ par $S_n(t)$, est encore valable à la limite, les intégrales convergeant nécessairement et $\varphi(t)$ étant définie pour t négatif par l'égalité $\varphi(-t)=\varphi(2\pi-t)$.

3. Lorsque $\varphi(t)$ est égal à 1, on retrouve la formule de Cauchy. Nous supposerons, dans le cas général, que la valeur moyenne a_0 de $\varphi(t)$ n'est pas nulle.

Si la fonction $\varphi(t)$ est orthogonale à la suite des fonctions $\cos kt$ $(k = 1, 2, \dots)$ ou encore, si la courbe $y = \varphi(x)$ admet comme centre le point $(0, a_0)$, la formule (2) devient:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \frac{F(z) + F(\bar{z})}{2}\, dt = (p-q) \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt.$$

Lorsque $f(z)$ est réelle sur l'axe réel, $F(\bar{z})$ est le nombre conjugué de $F(z)$ et on peut écrire, en désignant par $R[u]$ la partie réelle du nombre u,

$$p-q = \frac{\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, R[F(z)]\, dt}{\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt}.$$

C'est la formule de M. M. Petrovitch. Soit encore $\varphi(t)$, une fonction orthogonale à la suite $\sin 2kt$, $\cos 2kt$, $(k = 1, 2, \dots)$: son développement en série de Fourier ne contient que des multiples impairs de t. Posons

$$\varphi(t) = a_0 + \varphi_1 + \varphi_2,$$

φ_1 désignant la somme des sinus, φ_2 la somme des cosinus. Comme on peut écrire

$$\varphi(\pi - t) = a_0 + \varphi_1 - \varphi_2,$$

on a

$$a_0 + \varphi_1 = \frac{\varphi(t) + \varphi(\pi - t)}{2}, \qquad \varphi_2 = \frac{\varphi(t) - \varphi(\pi - t)}{2}$$

et la formule (2) devient

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\varphi(t) + \varphi(\pi - t)}{2}\, \frac{F(z) + F(\bar{z})}{2} + \frac{\varphi(t) - \varphi(\pi - t)}{2}\, \frac{F(z) - F(\bar{z})}{2} \right] dt =$$

$$= (p-q) \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt .$$

ou

$$\int_0^{2\pi} [\varphi(t) F(z) + \varphi(\pi - t) F(\bar{z})]\, dt = 2\,(p-q) \int_0^{2\pi} \varphi\,(t)\, dt\,.$$

En particulier, si $f(z)$ est réelle sur l'axe réel, le terme $F(z) - F(\bar{z})$ est purement imaginaire: sa contribution à l'intégrale est nulle et on a

$$p - q = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(t) + \varphi(\pi - t)}{2} R\,[F(z)]\, dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi\,(t)\, dt}\,.$$

D'ailleurs, d'une manière générale, on a, lorsque $f(z)$ est réel avec z, quelle que soit la fonction continue $\varphi(t)$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2} + a_0\right] R[F(z)]\, dt = a_0\,(p-q)\,.$$

4. Supposons $\varphi(t)$ définie dans l'intervalle $(0, 2m\pi)$, m désignant un entier supérieur à l'unité. On peut appliquer la formule (2) à chaque intervalle $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$, la fonction $\varphi(-t)$ étant définie comme égale à $\varphi[2(2k-1)\pi - t]$. En ajoutant les égalités (2), on obtiendra une formule semblable dans laquelle les intégrales sont étendues de 0 à $2m\pi$ et $\varphi(-t)$ peut être définie comme égale à $\varphi(2m\pi - t)$. Il en est de même si $\varphi(t)$ est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$, la fonction $\varphi(-t)$ étant alors définie comme précédemment dans chaque intervalle $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$.

Enfin, si $\varphi(t)$ est définie dans un intervalle arbitraire (a, b), $a < b$, on peut toujours supposer que a est positif et inférieur à 2π, en augmentant au besoin t d'un multiple convenable de 2π. Si $2m\pi$ est le premier multiple de 2π non inférieur à b, nous prendrons $\varphi(t)$ égale à 0 dans les intervalles

$$0 \leqslant t < a, \quad b < t \leqslant 2m\pi$$

et nous serons ramenés au cas précédent. En particulier, si $f(z)$ est réel avec z, on aura

$$\int_0^{2m\pi}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{2}+a_0\right]R[F(z)]\,dt=a_0(p-q)\,.$$

Et, si la courbe $y=\varphi(x)$ admet le centre $(0,\,a_0)$ ou, ce qui revient au même, si $\varphi(t)$ est orthogonale à $\cos kt$ $(k=1,2,\ldots)$ dans l'intervalle (a,b), le facteur de $R[F(z)]$ dans l'intégrale précédente est égal à $\varphi(t)$ et l'on obtient la formule de M. M. Petrovitch :

$$\int_a^b\varphi(t)\,R[F(z)]\,dt=(p-q)\int_a^b\varphi(t)\,dt.$$

5. Il n' y a rien à changer à ce qui précède si la fonction $\varphi(t)$ est une fonction complexe de la variable réelle t. La formule (2) subsiste: on peut même lui substituer la formule plus générale

$$(3)\quad \int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{2}+a_k\cos kt\right]\frac{F(z)+F(\bar z)}{2}+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2}-a_k\cos kt\right]\frac{F(z)-F(\bar z)}{2}\right\}dt$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^k-\sum_{j=1}^{q}\beta_j^k\right)\times\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos kt\,dt\,.$$

La formule (3) s'établit comme la formule (2) en tenant compte des valeurs obtenues, à l'aide du théorème des résidus, pour les intégrales $\int_0^{2\pi}e^{\pm ikt}F(z)\,dt$. On déduit de la formule (3) des conclusions semblables à celles que l'on a déduites de la formule (2). Par exemple, si $\varphi(t)$ est orthogonale à $\cos nt$ pour toutes les valeurs de n différentes de k, c'est-à-dire si $\varphi(t)$

diffère de e^{ikt} par une fonction impaire de t, et si en outre $f(z)$ est réelle lorsque z est réel, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, R[F(z)]\, dt = \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^k\right) \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos kt\, dt\,.$$

6. Nous avons, dans ce qui précède, employé le calcul des résidus surtout pour obtenir les valeurs de certaines intégrales élémentaires. Mais on peut établir directement et très simplement les formules (2) et (3) en remarquant que si $F(z)$ est holomorphe sur la circonférence (C) et au demeurant arbitraire, la fonction de t, périodique de période 2π,

$$F(z) + F(\bar{z}) = F(re^{it}) + F(re^{-it})$$

est une fonction paire et la fonction $F(z) - F(\bar{z})$ est une fonction périodique de même période et impaire. Il en résulte que les formules (1) sont évidentes puisque les fonctions sous le signe somme sont périodiques de période 2π et impaires.

De même, si $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont des fonctions intégrables de t, périodiques de période 2π, la première impaire et la seconde paire, on a immédiatement

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(t)\, [F(z) + F(\bar{z})]\, dt = \int_0^{2\pi} \varphi_2(t)\, [F(z) - F(\bar{z})]\, dt = 0\,.$$

Les formules (2) et (3) se déduisent aisément des remarques qui précédent. On voit qu'elles s'appliquent à toute fonction $\varphi(t)$, réelle ou complexe, de la variable t dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et intégrable dans cet intervalle.

En particulier, si la courbe $y = \varphi(x)$ a pour centre le point $(0, a_0)$, on retrouve les mêmes résultats que ci-dessus.

Prenons par exemple $F(z) = \log|f(z)|$, $f(z)$ étant toujours méromorphe dans l'interieur de (C) et holomorphe sur la circonférence avec $f(0) \neq 0$; on pourra écrire, en remarquant que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z)\, dt = \log \left| f(0)\, r^{p-q} \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \right|$$

d'après la formule de Jensen,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{2} + a_0 \right] \frac{F(z) + F(\bar{z})}{2} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2} - a_0 \right] \frac{F(z) - F(\bar{z})}{2} \right\} dt =$$

$$2\pi\, a_0 \log \left| f(0)\, r^{p-q} \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \right| .$$

Lorsque le point $(0, a_0)$ est un centre, cette formule devient

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \frac{F(z) + F(\bar{z})}{2} dt = \log \left| f(0)\, r^{p-q} \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \right| \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt .$$

Si $f(z)$ est réel avec z, on retrouve la formule établie par M. M. Petrovitch.