Remarque sur un déterminant

Par

T. PÉYOVITCH

Considérons le déterminant

$$(1) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

qui joue un rôle important dans la théorie de fractions continues où a_i sont des nombres entiers positifs. En faisant la transformation bien connue[1])

$$(2) \qquad b_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir}\, b_{rk}$$

et choisissant les coefficients m_{ir} de manière que l'on ait

$$(3) \qquad b_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir}\, b_{rk} = 0 \qquad (k < i),$$

on obtient la valeur du déterminant (1) sous la forme

---

[1]) Voir mon article précédent du même Journal, p. 113.

$$(4) \qquad \Delta_n = b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn}\,.$$

Les éléments b_{ii}, d'après (2) deviennent

$$(5) \qquad \begin{cases} b_{11} = a_{11}\,, \\ b_{22} = a_{22} - m_{21}\, b_{12}, \\ b_{33} = a_{33} - m_{31}\, b_{13} - m_{32}\, b_{23}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{nn} = a_{nn} - m_{n1}\, b_{1n} - m_{n2}\, b_{2n} - \cdots - m_{n\,n-1}\, b_{n-1\,n}\,, \end{cases}$$

où les coefficients m_{ir}, d'après (3) et vu le déterminant (1), sont donnés par les équations

$$m_{ir} = \frac{\Delta_{ir}}{\Delta_{rr}} = -\frac{\Delta_{r-1\,r-1}}{a_r\,\Delta_{r-1\,r-1} + \Delta_{r-2\,r-2}} \qquad \begin{pmatrix} \Delta_{11} = a_1 \\ \Delta_{00} = 1 \\ \Delta_{-1-1} = 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile à voir, d'après le déterminant (1), que l'on a

$$m_{21} = -\frac{\Delta_{00}}{a_1\,\Delta_{00}} = -\frac{1}{a_1}\,, \quad m_{i1} = 0 \text{ pour } i > 2;$$

$$m_{32} = -\frac{\Delta_{11}}{a_2\,\Delta_{11} + \Delta_{00}} = -\frac{a_1}{a_2\,a_1 + 1}\,, \quad m_{i2} = 0 \text{ pour } i > 3;$$

$$m_{43} = -\frac{\Delta_{22}}{a_3\,\Delta_{22} + \Delta_{11}}\,, \quad m_{i3} = 0 \text{ pour } i > 4$$

et, en général, pour $r = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$(6) \qquad m_{r+1\,r} = -\frac{\Delta_{r-1\,r-1}}{a_r\,\Delta_{r-1\,r-1} + \Delta_{r-2\,r-2}}\,, \quad m_{ir} = 0 \text{ pour } i > r+1\,.$$

Les éléments b_{ii} donnés par les équations (5), d'après le déterminant (1) et vu les équations (6), deviennent

$$\begin{aligned} &b_{11} = a_{11} = a_1\,, \\ &b_{22} = a_{22} - m_{21}\, b_{12} = a_2 - m_{21}\,, \\ &b_{33} = a_{33} - m_{32}\, b_{23} = a_3 - m_{32}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_{nn} = a_{nn} - m_{n\,n-1}\, b_{n-1\,n} = a_n - m_{n\,n-1}\,. \end{aligned}$$

Il en resulte

$$
\begin{aligned}
|b_{11}| &\leqslant A\,, \\
|b_{22}| &\leqslant A+M\,, \\
|b_{33}| &\leqslant A+M\,, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
|b_{nn}| &\leqslant A+M
\end{aligned}
$$

et par conséquent on obtient, d'après (4), la valeur maximum du module du déterminant (1)

$$|\Delta_n| \leqslant A\,(A+M)^{n-1}\,, \tag{7}$$

A étant la valeur maximum des éléments a_i du déterminant (1), M la valeur maximum des coefficients m_{ir}.

Supposons que les éléments a_i du déterminant (1) satisfont à la condition $a_i \geqslant 3$ $(l=1,2,\cdots,n)$, on aura, d'après (6),

$$|m_{ir}| \leqslant M \leqslant \frac{1}{3}$$

et l'inégalité (7) devient

$$|\Delta_n| \leqslant A\left(A+\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqslant A^n\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n-1} \tag{8}$$

avec $A \geqslant 3$, ce qui respésente la *valeur maximum du module du déterminant* (1).

Il est facile à voir que la valeur maximum du module du déterminant (1), d'après la formule de M. Hadamard, devient

$$|\Delta_n| \leqslant A^n\, 3^{\frac{n}{2}}. \tag{9}$$

En faisant la comparaison entre les formules (8) et (9) on obtient le théorème suivant:[1])

Sous la condition $a_i \geqslant 3$, *la valeur maximum du module du déterminant* (1) *donnée par la formule* (8) *est plus précise que celle donnée par la formule* (9) *de M. Hadamard.*

---

[1]) $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq 3^{\frac{n}{2}}, (3+1)^{2n-2} \leq 3^{3n-2}$, n étant l'ordre du déterminant (1).