Eine Anwendung der linearen Substitution einer komplexen Veränderlichen in der Flächentheorie

Von

ANTON VAKSELJ

Einleitung

Es sei $ds^2 = g_{ik}\, du^i\, du^k$ die erste Grundform der Fläche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u^i)$, $i = 1,2$, weiter ξ der Einheitsvektor der Tangentenrichtung $d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_i\, du^i$ im Punkte P der Flächenkurve $u^i = u^i(s)$, ζ der Einheitsvektor der Flächennormale, wobei $g = g_{11}\, g_{22} - g_{12}{}^2$ ist, und endlich $\eta = \zeta \times \xi$. Für die Flächenkurve lauten die Serret-Frenetschen Formeln folgenddermassen:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\dfrac{d\xi}{ds} & & * & \gamma\eta & +\, \varrho\zeta\,, \\[2ex]
\dfrac{d\eta}{ds} & = & -\,\gamma\xi & * & -\,\tau\zeta\,, \\[2ex]
\dfrac{d\zeta}{ds} & = & -\,\varrho\xi & +\, \tau\eta & *\,,
\end{array} \tag{1}
$$

wo ϱ und τ die Krümmung bezw. die geodätische Windung, γ aber die geodätische Krümmung sind. Wir bemerken noch, dass ϱ und τ entgegen γ nur von den ersten Differentialen du^i abhängen und der folgenden Krümmungsgleichung[1]:

---

[1] Vgl. meine Arbeit: Beiträge zur Flächentheorie. — Math. Zeitsch. Band 38 (1934), S. 445.

$$\tau^2 + \varrho^2 - 2H\varrho + K = 0 \tag{2}$$

genügen, in der H die mittlere und K die Gausssche Krümmung bedeuten. Ist $J = H^2 - K$, so ist weiter:

$$\tau = \sqrt{J} \sin 2\varphi ,$$

$$\varrho - H = \sqrt{J} \cos 2\varphi ,$$

wo mit φ der Winkel zwischen der Richtung ξ und der ersten Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet wurde.

Die Krümmung ϱ und die Windung τ vereinen wir[2]) zu einer einzigen *komplexen Krümmungsgrösse* $z = \varrho + i\tau$. Es ist

$$z - H = \sqrt{J}\, e^{2\varphi i}. \tag{4}$$

Die komplexe Krümmungsgrösse genügt der Gleichung:

$$z\bar{z} - H(z + \bar{z}) + K = 0. \tag{5}$$

Die in einem Punkte P der Fläche möglichen komplexen Krummungen z liegen auf dem durch H und K bestimmten Kreise (5) der komplexen z-Ebene.

In dieser Arbeit wollen wir uns mit einigen solchen geometrischen Konstruktionen, ausgeführt im Punkte P der betrachteten Fläche, beschäftigen, die zu jeder Tangentenrichtung ξ in allgemeinster Weise eine neue Richtung ξ' zuordnen. Daran anschliessend untersuchen wir weiter die funktionnelle Abhängigkeit der entsprechenden komplexen Krümmungen z und z'. Auf diese Weise erhalten wir nicht nur die involutorischen Dupinschen und die verallgemeinerten Darboux'schen[3]) konjugierten Tangentenrichtungen, sondern auch nichtinvolutorische Zuordnungen. Die sich daraus ergebende Abhängigkeit zwischen z' und z ist aber sehr einfacher Natur: *z' ist eine solche lineare Substitution von z, die den Kreis* (5) *in sich überführt.*

---

[2]) A. a. O. S. 450.

[3]) G. Darboux: Sur les solutions singulières des équations à dér. part. du premier ordre. — Mémoires des Sav. étran. t. XXVII (1883), zitiert nach G. Darboux: Théorie gén. des Surfaces t. III (1894) S. 499.

Es entsteht so in der Krümmungstheorie der Flächen ein ganz neues Anwendugsgebiet der linearen Substitutionen einer komplexen Veränderlichen.

Der nichtinvolutorische Fall

Die eben erwähnte geometrische Konstruktion erhalten wir in folgender Weise: Im beliebigen Punkte P der gegebenen Fläche legen wir tangential eine Hilfsfläche F_2 zweiter Ordnung. Bezeichnen wir in vektorieller Schreibweise den veränderlichen Punkt mit $\mathfrak{v}$ und setzen wir:

$$(6) \qquad (\mathfrak{v}-\mathfrak{r})\xi = x^1, \quad (\mathfrak{v}-\mathfrak{r})\eta = x^2, \quad (\mathfrak{v}-\mathfrak{r})\zeta = x^3,$$

so ist offenbar die Gleichung der verlangten Hilfsfläche F_2:

$$(F_2) \qquad 2x^3 - p_{ik}\, x^i\, x^k = 0,$$

wo die Koeffizienten p_{ik} zunächst willkürliche Werte besitzen. Die starrgedachte Hilfsfläche F_2 bewegen wir in der Richtung ξ und bestimmen die Berührungslinie der so erzeugten Hülf fläche mit der ursprünglichen F_2. Diese Raumkurve erhalten wir aber auch als Schnittkurve von F_2 und jener Fläche, deren Gleichung entsteht, wenn wir die Gleichung von F_2 nach s ableiten. Nun sind die Koeffizienten p_{ik} wegen der vorausgesetzten Starrheit der bewegten Hilfsfläche F_2 von s unabhängig, die Ableitungen der Veränderlichen x^i nach s erhalten wir aber aus den Gleichungen (6) und finden so:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{ds} &= -1 \quad * \quad + \gamma x^2 + \varrho x^3, \\ \frac{dx^2}{ds} &= \quad -\gamma x^1 \quad * \quad - \tau x^3, \\ \frac{dx^3}{ds} &= \quad -\varrho x^1 + \tau x^2 \quad * . \end{aligned}$$

Die abgeleitete Fläche ist dann definiert durch die folgende Gleichung:

$$p_{1i}\, x^i\, (-1 + \gamma x^2 + \varrho x^3) + p_{2i}\, x^i\, (-\gamma x^1 - \tau x^3) + (p_{3i}\, x^i - 1) \times (-\varrho x^1 + \tau x^2) = 0.$$

Die linearen Glieder der letzten Gleichung sind bis auf das Vorzeichen:

$$(p_{11} - \varrho)\, x^1 + (p_{12} + \tau)\, x^2 + p_{13} x^3 \,.$$

Die gesuchte Schnittkurve geht also durch den Punkt $\mathfrak{r}$ und besitzt dort die Tangente $x^3 = 0$ und:

$$(p_{11} - \varrho)\, x^1 + (p_{12} + \tau)\, x^2 = 0 \,.$$

Es ist daher nach (6) für die Punkte der erwähnten Tangente:

$$(\mathfrak{v} - \mathfrak{r})\, \zeta = 0, \quad (\mathfrak{v} - \mathfrak{r}) \left[(p_{11} - \varrho)\, \xi + (p_{12} + \tau)\, \eta \right] = 0.$$

Die angegebene geometrische Konstruktion ordnet also der ursprünglichen Richtung ξ die neue Richtung ξ' zu:

$$\xi' = \frac{(p_{12} + \tau)\, \xi + (\varrho - p_{11})\, \eta}{\sqrt{(p_{12} + \tau)^2 + (\varrho - p_{11})^2}} \tag{7}$$

Setzen wir $\xi \xi' = \cos \varphi_0$, $\eta \xi' = \sin \varphi_0$, so folgt aus (7);

$$\cos \varphi_0 = \frac{p_{12} + \tau}{\sqrt{(p_{12} + \tau)^2 + (\varrho - p_{11})^2}} \,, \qquad \sin \varphi_0 = \frac{\varrho - p_{11}}{\sqrt{(p_{12} + \tau) + (\varrho - p_{11})^2}} \,. \tag{8}$$

Die Zuordnung von ξ' zu ξ hängt also nur von p_{11} und p_{12} ab und ist insbesondere unabhängig von, p_{13}, p_{23} und p_{33}.

Wir wiederholen kurz die geometrische Erzeugungsweise dieser Zuordnung:

Man legt eine Hilfsfläche F_2 bestimmter Grösse und Form derart tangential an die gegebene Fläche, so dass ein auf F_2 festgewählter Punkt Q mit dem Punkte P der gegebenen Fläche und eine auf F_2 in Q festgewählte Tangentenrichtung mit der Fortschreitungsrichtung ξ zusammenfallen. Die zugeordnete Richtung ξ' ist dann die Tangentenrichtung der auf F_2 gelegenen Charakteristik jener Hüllfläche, die entsteht, wenn man die starrgedachte Hilfsfläche F_2 in der Richtung ξ fortwegt.

Für die Richtung ξ' wollen wir nun die komplexe Krümmung z' berechnen und ihren Zuzammenhang mit z aufdecken. Aus (4) folgt sofort:

$$z' - H = \sqrt{J}\, e^{2i(\varphi+\varphi_0)} = (z - H)\, e^{2i\varphi_0}.$$

Setzen wir:

$$e^{2i\varphi_0} = \frac{i\, e^{i\varphi_0}}{i\, e^{-i\varphi_0}},$$

so folgt weiter:

$$z' - H = (z - H)\frac{-(\varrho - p_{11}) + i(p_{12} + \tau)}{(\varrho - p_{11}) + i(p_{12} + \tau)} =$$

$$= (z - H)\frac{(p_{11} + i p_{12}) - \bar{z}}{z - (p_{11} - i p_{12})}.$$

Mit Hilfe von (5) eliminieren wir aus dem Zähler $\bar{z}$ und finden nach leichter Umformung:

$$z' = \frac{\alpha z + [K - H(\alpha + \bar{\alpha})]}{z - \bar{\alpha}}, \tag{9}$$

wo

$$\alpha = p_{11} + i p_{12}$$

bedeutet. Man bestätigt leicht, dass die lineaire Substitution (9) den Kreis (5) in sich überführt, wie es ja sein muss.

Ist die Determinante von (9):

$$-[\alpha\bar{\alpha} - H(\alpha + \bar{\alpha}) + K]$$

gleich Null, so ist die Substitution (9) ausgeartet, indem jedem z dieselbe Krümmung $z' = \alpha$ entspricht. Dies ergibt folgende in meiner schon zitierten Arbeit nur für Hauptkrümmungsrichtungen angegebene Eigenschaft [4]):

Bewegen wir in beliebiger Richtung eine tangential an die Fläche gelegte Hilfsfläche F_2, für welche der Wert von $\alpha = p_{11} + i p_{12}$ (5) genügt, so besitzen die Charakteristiken der entstehenden Hüllflächen, die auf den entsprechenden ursprünglichen F_2

[4]) A. a. O. S. 449.

liegen, im Punkte P dieselbe Tangente, nämlich jene Tangentenrichtung von P, die zur Krümmung $z' = \alpha$ gehört.

Die Substitution (9) lässt sich noch verallgemeinern, wenn wir die Koeffizienten p_{11} und p_{12} der Hilfsfläche F_2 von der Fortschreitungsrichtung ξ abhängig machen, wenn wir beispielsweise voraussetzen, dass die Grösse α folgendermassen von der komplexen Krümmung z abhängt:

$$\alpha = m(\bar{z} - H) + n. \tag{10}$$

Der involutorische Fall

Wir benützen die letzte Verallgemeinerungsmöglichkeit, um noch alle involutoricshen Zuordnungen von ξ und ξ' aufzustellen. Um dies explizit auszuführen, führen wir ein neues Koordinatensystem y^1 und y^2 ein, dessen Achsen in die Hauptkrümmungsrichtungen der gegebenen Fläche fallen. Da die Richtung ξ mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung den Winkel φ bildet, so ist der Zusammenhang der alten Koordinaten x^i mit den neuen y^i offenbar folgender:

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \cos\varphi - x^2 \sin\varphi, \\ y^2 &= x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi, \\ y^3 &= x^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Zu der obigen geometrischen Konstruktion bedienen wir uns jetzt der durch die Gleichung:

$$2y^3 - q_{ik}\, y^i\, y^k = 0 \tag{12}$$

gegebenen Hilfsfläche F_2. Wir bewegen die nach (12) in der Grösse und Form bestimmte und zur gegebenen Fläche tangential gelegene Hilfsfläche F_2 in der Richtung ξ und bestimmen in oben angegebener Weise die zugeordnete Richtung ξ'.

Setzen wir (11) in (12) ein, so erhalten wir nach kleinen Umformungen:

$$p_{11} = \frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}) + \frac{1}{2}(q_{11}-q_{22})\cos 2\varphi + q_{12}\sin 2\varphi\,,$$

$$p_{12} = \qquad -\frac{1}{2}(q_{11}-q_{22})\sin 2\varphi + q_{12}\cos 2\varphi$$

und somit:

$$\alpha = p_{11} + i\,p_{12} = \frac{\bar{z}-H}{\sqrt{J}}\left(\frac{q_{11}-q_{22}}{2} + i\,q_{12}\right) + \frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}).$$

Setzen wir den letzten Ausdruck für α, der offenbar die Gestalt (10) besitzt, in die Substitution (9), so bekommen wir folgende involutorische Substitution:

$$z' = \frac{az+b}{cz-a}, \tag{13}$$

wo:

$$a = \frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}) - \frac{H}{\sqrt{J}}\left(\frac{q_{11}-q_{22}}{2} - i\,q_{12}\right),$$

$$b = K - H(q_{11}+q_{22}) + \sqrt{J}\left(\frac{q_{11}-q_{22}}{2} + i\,q_{12}\right) +$$
$$+ \frac{H^2}{\sqrt{J}}\left(\frac{q_{11}-q_{22}}{2} - i\,q_{12}\right),$$

$$c = 1 - \frac{q_{11}-q_{22}}{2\sqrt{J}} + i\frac{q_{12}}{\sqrt{J}}$$

bedeuten. Die Substitution (13) bekommt eine übersichtlichere Gestalt, wenn wir sie in der Form:

$$z' - H = \frac{(z-H) - Ju}{u(z-H) - 1} \tag{14}$$

schreiben, wo:

$$u = \frac{1 - \dfrac{q_{11}-q_{22}}{2\sqrt{J}} - i\dfrac{q_{12}}{\sqrt{J}}}{\dfrac{1}{2}(q_{11}+q_{22}) - H} \tag{15}$$

ist. Die Doppelpunkte der Substitution (14) liegen auf dem Kreise (5):

$$z_1 - H = \frac{1+\sqrt{1-Ju\bar{u}}}{\bar{u}}, \quad \bar{z}_1 - H = \frac{1-\sqrt{1-Ju\bar{u}}}{u},$$

$$z_2 - H = \frac{1-\sqrt{1-Ju\bar{u}}}{\bar{u}}, \quad \bar{z}_2 - H = \frac{1+\sqrt{1-Ju\bar{u}}}{u},$$

Die den komplexen Krümmungen z_1 und z_2 entsprechenden Richtungen sind Doppelrichtungen der Zuordnung.

Die Tangenten in obigen Punkten des Kreises (5) sind von der Form:

$$(z-H)(\bar{z}_i - H) + (\bar{z} - H)(z_i - H) = 2J \qquad i = 1{,}2$$

und besitzen die gemeinsame Lösung:

$$z_0 - H = Ju,$$

womit die geometrische Deutung der Grösse u gefunden ist:

Der Parameter u der Substitution (14) *ist* $u = \frac{1}{J}(z_0 - H)$, *wo z_0 den Pol der Involution* (14) *bedeutet.*

Aus (14) und (15) ersehen wir eine bemerkenswerte Eigenschaft der Substitution (13): ihre Substitutionskoeffizienten hängen nicht direkt von den Koeffizienten q_{11}, q_{12}, q_{22} der Hilfsfläche F_2 ab, sondern diese befinden sich nur in dem Ausdruck für die Parametergrösse u. Die Koeffizienten q_{11}, q_{12}, q_{22} hängen aber in einfacher Weise von den Krümmungen der Hilfsfläche F_2 im Punkte Q ab. Es ist:

$$H' = \frac{1}{2}(q_{11} + q_{12}), \quad K' = q_{11} q_{22} - q_{12}^2, \quad J' = H'^2 - K'.$$

Bezeichnen wir noch mit θ den Winkel der ersten Hauptkrümmungsrichtungen der gegebenen Fläche und der Hilfsfläche F_2, so ist:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}.$$

Umgekehrt ist also:

$$\frac{1}{2}(q_{11}+q_{22})=\sqrt{J'}\cos 2\theta, \qquad q_{12}=\sqrt{J'}\sin 2\theta.$$

und somit:

$$z_0=\frac{(HH'-K)-\sqrt{JJ'}\,e^{2i\theta}}{H'-H}. \tag{16}$$

Wir wollen noch den Fall: $\frac{1}{2}(q_{11}+q_{22})-H=0$ erledigen, d. h. wenn die mittleren Krümmungen der gegebenen Fläche und der Hilfsfläche übereinstimmen. In diesem Falle ist aber:

$$z'-H=\frac{Jt^2}{z-H}, \tag{17}$$

wo:

$$t^2=\frac{\sqrt{J'}\,e^{2i\theta}-\sqrt{J}}{\sqrt{J}-\sqrt{J'}\,e^{-2i\theta}} \tag{18}$$

ist. Die den Doppelpunkten von (17):

$$z_1-H=t\sqrt{J}, \qquad z_2-H=-t\sqrt{J}$$

entsprechenden Doppelrichtungen sind orthogonal, was ohne weiteres aus (4) folgt.

Setzen wir $t=e^{i\omega}$, so bekommt die Gleichung (18) die einfachere Gestahlt:

$$\sqrt{J}\cos\omega-\sqrt{J'}\cos(\omega-2\theta)=0. \tag{19}$$

Verlangen wir noch, dass die Gaussschen Krümmungen der gegebenen Fläche und der Hilfsfläche ebenfalls gleich sind, ist also $K'=K$ und folglich $J'=J$, so wird: $\omega=\theta$. Die Doppelrichtungen sind dann die Symmetralen zwischen den beiden ersten bzw. zweiten Hauptkrümmungsrichtungen der beiden Flächen.

Die Gleichungen (16) und (19) zeigen endlich, dass *die Krümmungsgrössen H', K' und θ im Punkte Q der Hilfsfläche F_2 auf einfach unendlich viele Weisen so gewählt werden können, dass die erhaltene Zuordnung $\xi\to\xi'$ einer gegebenen Substitution* (14) *bezw.* (17) *entspricht.*

Nehmen wir beispielsweise $z_0 = \frac{K}{H}$, wobei die Doppelrichtungen mit den Asymptotenrichtungen zusammenfallen und zwei zugeordnete Richtungen ξ und ξ' die Dupinschen konjugierten Tangentenrichtungen sind, so folgen aus (16) die Gleichungen:

$$\theta = 0, \quad H' \sqrt{J} - H \sqrt{J'} = 0 \text{ bezw. } H'^2 K - H^2 K' = 0$$

als notwendige und hinreichende Bedingungen der betrachteten Zuordnung.