Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (tableaux ramifiés de M. Aronszajn)

Par

GEORGES KUREPA

Introduction

Le présent travail traitera des problèmes d'existence d'une certaine classe de tableaux ramifiés[1]), appelés tableaux ramifiés de M. Aronszajn.

Rappelons quelques définitions et notations dont nous nous servirons constamment[1]).

1. Soient E un ensemble partiellement ordonné par rapport à une relation binaire $<$ et a un point de E; nous désignerons respectivement par

$$(\cdot\,,a)_E\,,\ (\cdot\,,a]_E\,,\ (a\,,\cdot)_E\,,\ [a\,,\cdot)_E \tag{1}$$

l'ensemble de tous les points $x \varepsilon E$ tels que respectivement

$$x<a\,,\quad x\leqslant a\,,\quad a<x\,,\quad a\leqslant x \tag{1'}$$

et poserons

$$[a]_E=(\cdot\,,a)_E+[a\,,\cdot)_E\,. \tag{2}$$

---

1) Pour la terminologie, voir Georges Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, *Paris*, 1935 ou *Publ. Math. Univ. Belgrade*, IV, *1935*, pp. 1—138); dans ce qui suit, ce Mémoire sera désigné par Thèse.

Autrement dit, $[a]_E$ est l'ensemble de tous les points de E *comparables* à a[2]).

2. *Tableaux ramifiés.* Un ensemble E partiellement ordonné par $<$ est un *tableau ramifié* par rapport à $<$ si, quel que soit le point a de E, l'ensemble $(\cdot, a]$ est un sous-ensemble *bien ordonné* de E. En particulier, une famille d'ensembles, $\mathcal{F}$, sera dite un *tableau ramifié décroissant* (croissant) *d'ensembles*[3]) si, quel que soit l'ensemble A appartenant à $\mathcal{F}$, la famille $(\cdot, A]_{\mathcal{F}}$ des $X \varepsilon \mathcal{F}$ tels que $X \supseteq A$ $(A \subseteq X)$ est *bien ordonnée* par rapport à la relation d'inclusion $\supset$ $(\subset)$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par

$$T \tag{3}$$

un tableau ramifié par rapport à une relation binaire quelconque $<$. Nous poserons

$$\gamma T = \operatorname{Sup} tF^{4)}, \quad (\operatorname{Sup} \equiv \text{borne supérieure}), \tag{4}$$

F parcourant tous les sous-ensembles bien ordonnés de T; le nombre ordinal γT s'appelle *le rang de* T (v. Thèse, p. 74). Pour un ordinal quelconque $\alpha < \gamma T$,

$$R_\alpha T \tag{5}$$

désignera l'ensemble de tous les points a de T tels que

$$t(\cdot, a)_T = \alpha^{4)};$$

en particulier, $R_0 T$ sera l'ensemble de tous les *premiers* points de E.

L'ensemble $R_\alpha T$ s'appelle *la rangée* α *de* T; en particulier, $R_0 T$ s'appelle encore la *première rangée de* T (cf. Thèse, pp. 72--74).

Manifestement,

---

[2]) Deux points a, b de E sont *comparables* si $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$; autrement, a, b sont *incomparables*.

[3]) Dans Thèse nous n'avons considéré que des tableaux ramifiés décroissants d'ensembles.

[4]) $tX \equiv$ type d'ordre de X.

(6) $$\text{si } \alpha < \gamma T \text{ alors } R_\alpha T \neq 0$$

(7) $$\sum_\alpha R_\alpha T = T\,,\ (\alpha < \gamma T)\,.$$

3. *Tableaux ramifiés de* M. Aronszajn. Un tableau ramifié T sera dit un *tableau ramifié de* M. Aronszajn s'il vérifie ces quatre conditions:

a) $\gamma T = \Omega$;

b) Tout sous-ensemble bien ordonné de T est au plus dénombrable;

c) Chaque rangée de T est au plus dénombrable: $pR_\alpha T$[5]$\leqslant \leqslant \aleph_0$, $(\alpha < \gamma T)$;

d) Quels que soient le point a de T et l'ordinal $\alpha < \gamma T$, la rangée $R_\alpha T$ contient un point comparable à a; symboliquement, $[a]_T R_\alpha T \neq 0$, $(a \varepsilon T, \alpha < \gamma T)$.

C'est l'étude du problème de Souslin qui nous a amené à des tableaux ramifiés de M. Aronszajn dont l'existence fut établie par M. Aronszajn[6]).

4. *Position du problème.* Comme nous venons de le dire ci-dessus, nous nous occuperons dans ce qui suit de l'existence des tableaux ramifiés de M. Aronszajn. En particulier, nous exposerons au chapitre I la profonde démonstration, due à M. Aronszajn, de la proposition suivante:

1° *Il existe une famille d'ensembles linéaires fermés*

$$F_{\alpha,k}\,,\quad (k < \omega\,,\ \alpha < \Omega)$$

satisfaisant aux conditions I, II, III *que voici:*

I. Pour tour $\alpha < \Omega$ et tout $k < l < \omega$, on a $F_{\alpha,k} \cdot F_{\alpha,l} = 0$;

II. Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$, tout $F_{\alpha',l}$ est contenu dans un $F_{\alpha,k}$ sans coïncider avec celui-ci;

III. Pour tout $\alpha < \alpha' < \Omega$ et tout k, il existe un $F_{\alpha',l}$ tel que $F_{\alpha',l} \subset F_{\alpha,k}$ (l'égalité exclue!).

---

5) $pX \equiv$ puissance de X.

6) Voir ma Thèse, p. 96. Remarquons que tout T vérifiant b), c) contient un tableau ramifié de M. Aronszajn (cf. Thèse, p. 106); notons qu'un T de M. Aronszajn tel que, pour tout $a \varepsilon T$, il y ait une infinité de points $x \varepsilon T$ vérifiant $(.,a)_T = (.,x)_T$, (cf. (1)), fut appelé par nous une suite ramifiée distinquée de rang Ω (cf. Thèse, p. 99).

Bref, *il existe un tableau ramifié décroissant de M. Aronszajn composé d'ensembles linéaires fermés.*

Depuis un moment, je fus hanté par le problème de l'existence d'un tableau ramifié de M. Aronszajn d'ensembles linéaires fermés, et, quelques jours avant de partir de Varsovie (vers la fin du mois d'avril 1937), j'avais cru avoir résolu la question par l'affirmative et avais composé là-dessus un article et transmis à la Rédaction des *Fundamenta Mathematicae.* Une dizaine de jours après, j'avais découvert une faute dans ma démonstration, faute qui se trouve aussi dans ma Thèse (pages 96 et 97 où par une fausse application du th. 6, p. 89, j'avais obtenu la proposition fausse constituant la remarque 2, p. 97, loc. cit.).

N'ayant pas pu rétablir la démonstration de la proposition 1° ci-dessus, je me suis adressé à M. Aronszajn; M. Aronszajn y a réussi, et, fait curieux, deux jours après qu'il avait bien voulu m'exposer sa belle démonstration, j'ai appris, lors d'une conversation avec M. Denjoy, que, de sa part, l'illustre géomètre, en s'occupant du problème de Souslin, avait été, dès e printemps 1936, en possession de la qroposition 1°.

5. *Transformations et fonctions croissantes*[7]. Dans le chap. II, en nous servant d'un raisonnement constituant le développement du raisonnement des pages 96, 97 de Thèse, nous établirons quelques liens inattendus entre des ensembles linéaires non dénombrables, d'une part, et des tableaux ramifiés de M. Aronszajn, d'autre part.

Pour nous mieux expliquer, posons une définition[7]:

E_i étant un ensemble partiellement ordonné par ϱ_i, $(i = 1, 2)$, nous dirons qu'*il existe une transformation croissante de* E_1 *en* E_2 si l'on peut faire correspondre à tout point a de E_1, un point bien déterminé $f(a)$ de E_2 de manière que, quels que soient les points x, y de E, la relation $x \varrho_1 y$ entraîne $f(x) \varrho_2 f(y)$ dans le cas où E_2 est un *ensemble linéaire*, nous dirons que $f(a)$ $(a \varepsilon E_1)$, est une *fonction réelle croissante dans* E_1.

6. Ceci étant, voici ce qu'on peut établir:

---

[7]) Voir Georges Kurepa, *Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés* C. R., 20, 1937.

2⁰ *Quel que soit l'ensemble linéaire partout dense M de puissance $\leqq \aleph_1$, il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn, T, et une fonction réelle uniforme croissante dans T, soit $f(a)$, $(a \varepsilon T)$, tels que $f(T) = M$*[8]*; dans le cas où M est non dénombrable, la fonction f peut être supposée* u n i v a l e n t e (cf. n° 29, théorème 3bis).

3⁰ *Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable M, il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn, T, et une fonction réelle* b i u n i v o q u e *croissante dans M, soit f, tels que $f(T) \subseteq M$*[8]*.*

Par conséquent, en détruisant partiellement, dans l'ensemble linéaire $f(M)$ l'ordre de celui-ci, on peut arriver à un tableau ramifié semblable à T: pour cela, il suffit de déclarer *incomparables* tout couple de points x, y de $f(M)$ dès que le sont les points $f^{-1}(x)$[9]$, f^{-1}(y)$ de T.

7. Remarquons que, quel que soit le tableau ramifié de M. Aronszajn, T, il y a une transformation biunivoque croissante f, de T dans l'ensemble ordonné

$$(\cdot, \Omega) \tag{8}$$

des nombres ordinaux $< \Omega$; pour s'en rendre compte, nous n'avons qu'à énumérer chaque rangée $R_\alpha T$ de T

$$R_\alpha T \cdots a_0^\alpha,\ a_1^\alpha,\ \cdots,\ a_n^\alpha, \cdots,\ (n < \omega,\ a_m^\alpha \neq a_n^\alpha,\ m < n < \omega)$$

et poser

$$f(a_n^\alpha) = \omega\alpha + n,\ (n < \omega,\ \alpha < \Omega).$$

Autrement dit, *quel que soit le tableau ram. de M. Aronszajn il y a un „désordonnement" partiel de l'ensemble $(\cdot, \Omega)$ tel qu'on obtienne un ensemble partiellement ordonné, semblable à T* et donc identique à T au point de vue d'ordre.

8. Or, ce qui est difficile c'est d'examiner la nature des désordonnements partiels variés de $(\cdot, \Omega)$ pour obtenir tous les tableaux ram. de M. Aronszajn.

---

[8]) $f(T) \equiv$ l'ensemble des $f(a)$, $(a \varepsilon T)$.

[9]) Pour un $x \varepsilon f(T)$, $f^{-1}(x)_T$ désigne l'ensemble des $a \varepsilon T$ tels que $f(a) = x$.

Dans le chap. II nous indiquerons un procédé d'un désordonnement partiel de $(\cdot, \Omega)$, (cf. n° 26, proposition I_Ω), procédé qui nous fournira les propositions 2°, 3° ci-dessus; il est remarquable que chacun des tableaux ramifiés de M. Aronszajn *que nous obtenons par ce procédé-là* contient un sous-ensemble *non dénombrable* de points deux à deux *incomparables*[10]), propriété très précieuse, étant donné que *la condition nécessaire et suffisante pour que la réponse au problème de Souslin soit affirmative c'est que tout tableau ramifié de M. Aronszajn contient un sous-ensemble non dénombrable de points deux à deux incomparables*[11]).

En terminant, ajoutons que le présent travail est une partie d'un Mémoire que Mlle St. Braun a examiné de plus près; je tiens à la remercier bien vivement de toutes les remarques qu'elle a bien voulu me faire à ce propos.

I. Tableaux ramifiés d'ensembles fe més linéaires

9. *Généralités.* D'après un théorème bien connu de Baire, toute suite *décroissante* (croissante) d'ensembles *fermés* (ouverts) extraits d'un espace distanciable séparable quelconque est au plus dénombrable[12]); d'autre part, un théorème, dû à M. Hausdorff, dit que toute suite *croissante* (décroissante) d'ensembles *fermés* (ouverts) d'un espace distanciable séparable est au plus dénombrable.

On en déduit que, quel que soit le tableau ramifié décroissant (croissant), $\mathfrak{T}$, d'ensembles linéaires fermés ou ouverts[13]), on a

$$\gamma\mathfrak{T} \leqslant \Omega \text{ [13]}. \tag{9}$$

En ce qui concerne le cas des ensembles ouverts, on a le

Théorème 1. Tout tableau ramifié décroissant (croissant), $\mathfrak{T}$, d'ensembles ouverts appartenant à un espace métrique séparable quelconque est au plus dénombrable[14]).

---

10) Cf. *loc. cit.* 7), théorème 1.

11) Cf. Thèse pp. 106, 124 et 132 (l'équivalence $P_2 \rightleftarrows P_3$)

12) Voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits, Paris, 1928*, p. 234.

13) Pour la terminologie et les notations, voir l'Introduction, n° 2.

14) Le théorème subsiste encore pour tout espace (V) de M. Fréchet définissable moyennant une famille au plus dénombrable de voisinages (voir 12)).

$$\delta(a_1, r, F_1) - 2\eta < \delta(a_2, r+2\eta, F_2) \ . \tag{24}$$

Dès lors, a_2 parcourant F_2, on obtient (21). C.q.f.d.

14. Lemme 4. *Dans tout ensemble parfait linéaire borné nulle part dense, F, il y a une suite de sous-ensembles parfaits $F_0, F_1, \cdots, F_n, \cdots, (n<\omega)$ tels que*

$$\text{dist}\ (F, F_n) \to 0 \ \textit{avec}\ n \to \infty \ \textit{et que}\ F_i F_k = 0$$

pour tout $i<k<\omega$.

F étant homéomorphe de l'ensemble triadique C de Cantor formés des nombres $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^k}$, $(i_k=0, 1)$, il suffira de montrer le lemme 4 pour $F=C$. Or, en désignant par C_n l'ensemble de tous les nombres réels x tels que

$$x = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{2i_k}{3_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2^n(4k-1)}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^{2^n(4k+1)}} \ ,$$

on prouve que les ensembles $C_1, C_2, \cdots$ sont: parfaits, deux à deux disjoints et que dist $(C, C_n) \to 0$ avec $n \to \infty$.

15. Passons à la construction des ensembles $F_{\alpha,k}$ dont on parle dans le théorème 2. Pour commencer, soient $F_{o,k}$, $(k<\omega)$, les ensembles parfaits C_n appartenant à l'ensemble C de Cantor que nous venons de considérer; d'une manière générale, soit $0<\beta<\Omega$ et supposons que, pour tout $\alpha<\beta$, l'on ait construit des ensembles parfaits $F_{\alpha,k}$, $(k<\omega)$ et que la famille des $F_{\alpha,k}$, $(\alpha<\beta,\ k<\omega)$ vérifie les conditions I_β, II_β, III_β qu'on déduit des conditions I, II, III en y remplaçant partout Ω par β; supposons de plus que la condition suivante soit vérifiée:

$\mathrm{III}_\beta^{\mathrm{bis}}$. Quels que soient $\alpha<\alpha'<\beta$, il existe pour tout $F_{\alpha,k}$ et tout indice $n<\omega$, un $F'_{\alpha,l} \subset F_{\alpha,k}$ tel que

(25) $$\operatorname{dist}(F_{\alpha,k}, F_{\alpha',l}) < \frac{1}{2^n}$$ [16] .

Construisons la famille $\mathfrak{F}_\beta$ des $F_{\beta,k}$.

Si β est de première espèce, désignons, pour tout $k<\omega$, par $\{F_{\beta-1,k}\}$ une certaine suite dénombrable de sous-ensembles parfaits de $F_{\beta-1,k}$, deux à deux disjoints et tels que

(26) $$\operatorname{dist}(F_{\beta-1,k}, F) \to 0, \quad F \text{ parcourant } \{F_{\beta-1,k}\};$$

alors, $\mathfrak{F}_\beta$ désignera la famille des éléments des $\{F_{\beta-1,k}\}$, k parcourant les índices $<\omega$.

Si β est de seconde espèce, soit

(27) $$0=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_n\cdots$$

une suite d'indices croissants $<\beta$ tendant vers β. Prenons un $\alpha<\beta$ quelconque et soit

(28) $$\beta_{i-1} \leq \alpha < \beta_i .$$

Pour un $F_{\alpha,k}$ quelconque et tout $n<\omega$, construisons la suite

(29) $$F_{\alpha,k} \supset F_{\beta_i, l_i} \supset F_{\beta_{i+1}, l_{i+1}} \supset \cdots$$

de manière que, en posant:

(30) $$\delta_j(r)=\delta(r, F_{\beta_j, l_j}), \ (j \geqslant i)$$

(31) $$\varrho_{i-1}=\operatorname{dist}(F_{\alpha,k}, F_{\beta_i, l_i})$$

(32) $$\varrho_j=\operatorname{dist}(F_{\beta_j, l_j}, F_{\beta_{j+1}, l_{j+1}}), \ (j \geqslant i),$$

l'on ait:

(33) $$\varrho_j \leq \frac{1}{8}\,\delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) \text{ pour tout } j \geqslant 1,$$

(34) $$\varrho_{i-1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

(35) $$\varrho_{j+1} \leq \frac{\varrho_j}{2} .$$

En variant indépendamment α, k, n, on désignera pat $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles

(36) $$F = \Pi F_{\beta_j, l_j} \ (i \leq j < \omega) .$$

Il est essentiel de prouver que F est parfait: F étant non vide, borné et fermé, prouvons qu'il est dense en soit. Pour cela, il suffira, d'après le lemme 1, de prouver que

(37) $$\delta(r, F) > 0 \text{ pour tout } r \text{ réel } > 0.$$

Or, en posant

(38) $r_j = \operatorname{dist}(F, F_{\beta_j, l_j})$, on aura

(39) $$r_j \leqslant \sum_{m=j}^{\infty} \varrho_m = \varrho_j \left(1 + \sum_{m>j} \frac{\varrho_m}{\varrho_j}\right) \leqslant \varrho_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2\varrho_j$$

D'autre part, à la suite du lemme 3,

$$\delta\left(\frac{1}{2^j} + 2r_j, F\right) \geqslant \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) - 2r_j ,$$

ce qui, en vertu de (39) et (33), entraîne

$$\delta\left(\frac{1}{2^j} + 2r_j, F\right) \geqslant \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) - 4\varrho_j \geqslant \frac{1}{2}\, \delta_j\left(\frac{1}{2^j}\right) > 0$$

c'est-à-dire

$$\delta\left(\frac{1}{2^j}+2r_j, F\right) < 0. \tag{40}$$

Or, $\frac{1}{2^j}+2r_j \to 0$ avec $j \to \infty$; si alors

$\frac{1}{2^q}+2r_q < r$, la fonction $\delta(r, F)$ étant non décroissante par rapport à r, on a, d'après (40),

$$\delta(r, F) > 0 \qquad C.q.f.d.$$

16. Prouvons encore que les conditions $\mathrm{I}_{\beta+1}$, $\mathrm{II}_{\beta+1}$, $\mathrm{III}_{\beta+1}$, $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}_{\beta+1}$ sont vérifiées. Tout d'abord $\mathfrak{F}_\beta$ étant dénombrable, ses éléments peuvent toujours être rangés de manière qu'on obtienne une suite de type ω d'ensembles deux à deux distincts et donc disjoints. Vérifions la Condition $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}_{\beta+1}$; pour cela, notons que

$$\mathrm{dist}\,(F, F_{\alpha,k}) \leqslant \sum_{j=i-1}^{\infty} \varrho_j = \varrho_{i-1}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varrho_{i-1}}{\varrho_j}\right); \tag{41}$$

d'autre part, en vertu de (35)

$$\frac{\varrho_j}{\varrho_{i-1}} \leqslant \frac{1}{2^j}, \qquad (i \leqslant j < \omega) \tag{42}$$

Dès lors, enfin,

$$\mathrm{dist}\,(F, F_{\alpha,k}) \leqslant \frac{1}{2^n} \tag{43}$$

La condition $\mathrm{III}^{\mathrm{bis}}_{\beta+1}$ étant facile à vérifier pour un β de première espèce, la construction de $F_{\beta,k}$ est possible pour tout $\beta < \Omega$, ce qui constitue la démonstration du théorème 2.

17. En posant

$$E_\alpha = \sum_k F_{\alpha,k}, \quad (k < \omega), \tag{44}$$

on a

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_\alpha \supseteq \ldots, \quad (\alpha < \Omega) \text{ et}$$

$$E_0 \supset E_\omega \supset E_{\omega \cdot 2} \supset \ldots \supset E_{\omega\alpha} \supset \ldots, \quad (\alpha < \omega). \tag{45}$$

Les $E_{\omega\alpha}$, $(\alpha < \Omega)$, constituant une suite transfinie décroissante d'ensembles linéaires F_σ, nous obtenons ainsi un théorème de M M. Zalcwasser—Sierpinski [17]).

De plus, manifestement

$$\prod_\alpha E_{\omega\alpha} = 0, \quad (\alpha < \Omega) \tag{46}$$

d'où l'on déduit un théorème de M. Hausdorff d'après lequel tout espace distanciable séparable complet non dénombrable est la somme d'une suite croissante de type Ω de ses ensembles G_δ [18]).

II Ensembles linéaires et tableaux ramifiés de M. Aronszajn. L'ensemble σ

18. *L'ensemble* σ. Nous désignerons par σ (ou σ_0) la famille de tous les sous-ensembles bien ordonnés bornés non vides de l'ensemble ordonné des nombres rationnels. e étant un élément de σ, soit α le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné e; il est bien connu que $\alpha < \Omega$ et que les points de e peuvent être rangés comme il suit:

$$a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots, \quad (\xi < \alpha)$$

et cela de façon que, pour tout $\mu < \nu < \alpha$, $a_\mu < a_\nu$. Dans ces conditions e sera désigné par

---

[17]) Voir. Z. Zalcwasser, *Fund. Math.* III, p. 45 et W. Sierpinski, *C. R. Soc. Sci. de Varsovie, 1933*, pp 85—89; aussi, W. Sierpinski *Mathematica*, XII, *1936*, pp. 116—118.

[18]) Voir F. Hausdorff, *Fund. Math. 26, 1936*, pp. 241—255; en particulier le théorème 1.

(47) $$(a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}.$$

Si alors e^i, $(i = 1,2)$, sont deux éléments de σ, et si

$$e^i = (a_0^i, \ldots, a_\xi^i, \ldots)_{\xi<\alpha^i}, \quad (i = 1,2),$$

le signe

(48) $e^1 <\cdot\, e^2$ équivaudra à ce que $\alpha^1 < \alpha^2$ et

$a_\xi^1 = a_\xi^2$ pour tout $\xi < \alpha^1$; on conviendra que $e^2 \cdot\!> e^1$ veut dire $e^1 <\cdot\, e^2$.

On vérifie sans peine que $<\cdot$ est une relation d'ordre; *dans ce qui suit, nous supposerons que σ est partiellement ordonné par rapport à* $<\cdot$; c'est ainsi que nous parlerons de *l'ensemble partiellement ordonné σ et de ses points* (47).

On voit que tout sous-ensemble ordonné de σ est bien ordonné et qu'aucun point de σ n'est précédé de deux points incomparables de σ; on a donc le

Lemme 5. *σ est un tableau ramifié*[19]) *dont tout sous-ensemble ordonné est au plus dénombrable;* $\gamma\sigma = \Omega$ (voir (4) et le lemme 7).

19. Voici encore une notion utile. Soient T un tableau ramifié et F un sous-ensemble ordonné non vide de T; *la borne supérieure de F relativement à T*, symboliquement

(49) $$\operatorname{Sup} F, \ (\text{rel. } T),$$

sera: le *dernier point* de F s'il y en a un, et *la première rangée* (voir (5)) de l'ensemble des points de T dont chacun succède à tout point de F, si F n'a pas un dernier point.

On voit que

(49') $$R_0\left(\prod_{a \in F} [a, \cdot)_T\right) = \operatorname{Sup} F, \ (\text{rel. } T)^{20}).$$

---

[19]) Pour la terminologie, voir l'Introduction (aussi Thèse pp. 73, 126).
[20]) Voir (1) et (5).

Dans le cas de l'ensemble σ, on voit que pour tout $F \subset \sigma$ ordonné non vide, l'ensemble $\operatorname{Sup} F$, (rel. σ), est composé d'un élément au plus, à savoir de l'ensemble bien ordonné des nombres rationnels constituant les éléments de F (dans le cas, bien entendu, où celui-ci est borné dans σ[21]).

20. *Fonction* $f(e)$, $(e \varepsilon \sigma)$. Soit, pour tout élément $e = (a_0, a_1, \cdots, a_\xi \cdots)_{\xi<\alpha}$ de σ

$$f(e) = \operatorname*{Sup}_{\xi<\alpha} a_\xi ; \tag{50}$$

$f(e)$ sera un nombre réel bien déterminé. D'une manière générale, soit, pour tout sous-ensemble non vide E de σ,

$$f(E) \text{ l'ensemble des } f(e),\ (e \varepsilon E). \tag{51}$$

Lemme 6. *Pour tout couple d'éléments* a, b de σ

$$\textit{la relation } a \lessdot b \textit{ entraîne } f(a) \leq f(b), \tag{52}$$

l'égalité $f(a) = f(b)$ *ne se produisant que dans le cas où l'ensemble* $b - a$ *est composé du nombre* $\operatorname*{Sup}_{x \varepsilon a} x$.

Par conséquent, la fonction f est: *non décroissante* dans σ et *croissante dans chacun des ensembles* $\sum_\alpha R_{\alpha+1}\sigma$, $\sum_\alpha R_{\omega\alpha}\sigma$, $(\alpha < \Omega)$ (voir l'Introduction, n° 5).

Lemme 7. *Quels que soient* $e \varepsilon \sigma$, $\beta < \Omega$, *l'ensemble* $f(R\ (e, \cdot)_\sigma)$ *est partout dense sur l'intervalle* $(f(e), \cdot)$ *des nombres réels* $> f(e)$ (voir (1), (5) et (51)).

Tout d'abord, si $e = (a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$, $R_0(e, \cdot)_\sigma$ coïncide avec l'ensemble des éléments de σ de la forme $(a_0, \ldots, a_\xi, \ldots r)_{\xi<\alpha}$,

---

[21]) Un sous-ensemble non vide F d'un ensemble partiellement ordonné E est *borné dans* E s'il y a deux points a, b de E tels que tout point de F soit *entre* les points a, b.

r parcourant les nombres rationnels $> f(e)$ ou $\geqslant f(e)$, suivant que α est de *première* ou de *seconde espèce*; puisque

$$f((a_0, \ldots a_\xi \ldots, r)_{\xi < \alpha}) = r,$$

le lemme 7 est évident dans le cas où $\beta = 0$.

Supposons que $0 < \beta < \Omega$ et qu'on ait montré que, quels que soient $e \varepsilon \sigma$, $\xi < \beta$, l'ensemble $f(R_\xi(e, \cdot)_\sigma$ soit partout dense sur $(f(e), \cdot)$; prouvons que la propriété subsiste pour $\xi = \beta$. Si β est de première espèce, l'ensemble $f(R_{\beta-1}(e, \cdot)_\sigma)$ est, par hypothèse, partout dense sur $(f(e), \cdot)$; de même, pour tout $b \varepsilon R_{\beta-1}(e, \cdot)_\sigma$, $f(R_0(b, \cdot)_\sigma)$ est partout dense sur $(f(b), \cdot)$; dès lors, l'ensemble

$$\sum_b f(R_0(b, \cdot)_\sigma) = f(\sum_b R_0(b, \cdot)_\sigma) = f(R_\beta(e, \cdot)_\sigma), (b \varepsilon R_{\beta-1}(e, \cdot)_\sigma),$$

est partout dense sur $(f(e), \cdot)$.

Si β est de seconde espèce, soit $\beta_0 < \beta_1 <\cdot\cdot \beta_n <\cdot\cdot$ une suite d'indices $<\beta$ tendant vers β; soient, alors, x un nombre réel quelconque $> f(e)$ et $x_0, x_1, \cdot\cdot, x_n, \cdot\cdot$ une suite de nombres réels croissants tels que $f(e) < x_0$ et $\operatorname{Sup}_{<\omega} x_n = x$; en désignant par e^0 un élément quelconque de $R_{\beta_0}(e, \cdot)_\sigma$ tel que $e <\cdot e^0$ et $f(e) < f(e^0) < x_0$, soit, pour tout entier $n > 0$, e^n un élément de $R_{\beta_n}(e, \cdot)_\sigma$ tel que $e^{n-1} <\cdot e^n$ et $x_{n-1} < f(e^n) < x_n$. En posant

$$e(x) = \operatorname{Sup}_{n<\omega} e^n, \text{ (rel } \sigma), \text{ (voir (49))},$$

$e(x)$ est un élément bien déterminé de $R_\beta(e, \cdot)_\sigma$ tel que $x = f(e(x))$. On en conclut que, dans ce cas, $(f(e), \cdot) = f(R_\beta(e, \cdot)_\sigma)$.

Le lemme 7 entraîne ces deux corollaires:

Corollaire 1. *Pour tout* $e \varepsilon \sigma$, $\gamma [e]_\sigma = \gamma\sigma = \Omega$ (voir (2), (4) et le lemme 5).

Corollaire 2. *Pour tout* $\alpha < \Omega$, $f(R_\alpha \sigma)$ *est partout dense et coïncide, pour tout* $\alpha > 0$ *de seconde espèce, avec l'ensemble des nombres réels.*

21. *Fonctions* $g(\alpha)$, $(\alpha < \Omega)$ *et Théorème d'existence.* Soit

$$g(\alpha),\ (\alpha < \Omega) \tag{53}$$

une fonction réelle uniforme définie dans l'ensemble $(\cdot, \Omega)$ des nombres ordinaux $< \Omega$; nous supposerons que la fonction g vérifie ces deux conditions :

A) La fonction g est univalente dans chacun des ensembles

$$[\omega^2 \beta,\ \omega^2(\beta+1)),\quad (\beta < \Omega)\ ^{22});$$

B) Pour tout $\beta < \Omega$, l'ensemble

$$G_\beta \text{ des nombres réels } g(\alpha), \alpha \text{ vérifiant } \omega\beta \leq \alpha < \beta(\beta+1), \tag{54}$$

est partout dense (sur l'ensemble des nombres réels).

On en déduit que chacun des ensembles G_β est semblable à l'ensemble ordonné des nombres rationnels et que

$$G_\beta\, G_{\beta+n} = 0,\quad (\beta < \Omega,\ n < \omega). \tag{54'}$$

Ceci étant, nous sommes à même d'établir le

Théorème d'existence de tableaux ramifiés de M. Aronszajn.

$g(\alpha)$, $(\alpha < \Omega)$, *étant une fouction de l'espèce que nous venons de considérer, il existe dans l'ensemble* $(\cdot, \Omega)$ *des nombres ordinaux* $< \Omega$ *une fonction biunivoque à valeurs appartennant à* σ :

$$\varphi(\alpha),\ \varphi(\alpha)\ \varepsilon\ \sigma,\ (\alpha < \Omega)$$

telle que

$$f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha),\quad (\alpha < \Omega) \tag{E}$$

---

[22]) Notons que $[\omega^2\beta, \omega^2(\beta+1))$ désigne l'ensemble des nombres ordinaux ξ vérifiant $\omega^2\beta \leq \xi < \omega^2(\beta+1)$.

Quant à l'arithmétique des nombres ordinaux, voir W. Sierpinski, *Nombres transfinis, Paris, 1928*: chap. X.

et que, pour aucun couple $\alpha < \beta < \Omega$, *on n'ait* $\varphi(\beta) <\cdot\, \varphi(\alpha)$ *et que, enfin, l'ensemble* $\varphi(\cdot, \Omega))$ *des* $\varphi(\alpha)$, $(\alpha < \Omega)$, *soit un tableau ramifié de M. Aronszajn extrait de* σ (voir l'Introduction, n° 3, (48), (50)).

Puisque $(\cdot\,, \Omega) = \sum_{\beta} [\omega^2 \beta, \omega^2 (\beta + 1))$, $(\beta < \Omega)$, la fonction φ sera déterminée lorsque nous l'aurons définie dans chacun des ensembles

$$(55_\beta) \qquad [\omega^2 \beta, \omega^2 (\beta + 1)) .$$

22. Pour commencer, soit, pour tout α tel que

$$(55_0) \qquad \alpha \,\varepsilon\, [\omega^2 . 0,\ \omega^2 . 1) \text{ c'est-à-dire } \alpha < \omega^2,$$

$\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

$$(56_0) \qquad \varphi(\alpha) \,\varepsilon\, R_\omega \sigma,\ f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha)$$

D'après le corollaire 2, un élément pareil existe pour tout α. Prouvons que si $\alpha_1 < \alpha_2 < \omega^2$ alors $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$. En effet, si l'on avait $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$, on aurait, la fonction f, (voir (50)), étant uniforme, $f(\varphi(\alpha_1)) = f(\varphi(\alpha_2))$, ce qui, vu (56_0), entraînerait $g(\alpha) = g(\alpha_2)$, contrairement à l'univalence de g dans $[0, \omega^2)$ (cf. la condition A), n° 21).

En désignant par S_0 l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, $(\alpha \,\varepsilon\, [\omega^2 . 0, \omega^2 . 1))$

$$(57_0) \qquad S_0 = \varphi([0, \omega^2)),$$

la fonction f est univalente dans S_0 et, d'après (E),

$$(58_0) \qquad f(S_0) = \sum_n G_n,\ (n < \omega) \text{ (voir (54))} .$$

Prouvons que $f(e_1) \neq f(e_2)$ pour tout couple d'éléments distincts e_1, e_2 de S_0. En effet, en désignant par α_i un nombre ordinal $< \omega^2$ tel que $\varphi(\alpha_i) = e_i$, $(i = 1,2)$, nous venons de voir que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et donc aussi $g(\alpha_1) \neq g(\alpha_2)$ et finalement $f(e_1) \neq f(e_2)$

23. Prolongeons la fonctions $\varphi(\alpha)$, $(\alpha < \omega^2)$, en la définis sant encore dans l'ensemble

$$(55_1) \qquad [\omega^2 . 1,\ \omega^2 . 2).$$

Pour ceci, soit

(59_0) $\quad e_0^0, e_1^0, \ldots, e_n^0, \ldots, \ (n < \omega;\ e_m^0 \neq e_n^0,\ m \neq n),$

la suite de tous les éléments de S_0.

Considérons e_0^0 et désignons, pour tout α tel que

(55_1^0) $\quad \alpha \varepsilon [\omega^2, \omega^2+\omega),\ g(\alpha) > f(e_0^0),$

par $\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

(56_1^0) $\quad \varphi(\alpha) \varepsilon R_\omega(e_0^0, \cdot)_\sigma,\ f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha);$

soit

(60_1^0) $\quad E_0^0$ l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (55_1^0), alors

(61_1^0) $\quad E_0^0 \subset R_\omega(e_0^0, \cdot)_\sigma, f(E_0^0) = (f(e_0^0), \cdot)_{G_\omega}.$

La fonction $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (55_0) ou (55_1^0), est univalente de même, la fonction $f(e)$ est univalente dans $S_0 + E_0^0$.

Considérons, dans (59_0). l'élément e_1^0 et désignons pour tout α:

(55_1^1) $\quad \alpha \varepsilon [\omega^2, \omega^2 + \omega \cdot 2), f(e_1^0) < g(\alpha), g(\alpha) \text{ non } \varepsilon f(E_0^0),$

par $\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

(56_1^1) $\quad \varphi(\alpha) \varepsilon R_\omega(e_1^0, \cdot)_\sigma, f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha).$

On vérifie que φ est univalente dans l'ensemble des α dont chacun vérifie l'une des conditions (55_0), (55_1^0), (55_1^1). En désignant par

(60_1^1) $\quad E_1^0$ l'ensemble des $\varphi(\alpha)$, α vérifiant (55_1^1), on a

(61_1^1) $\quad f(E_1^0) = (f(e_1^0, \cdot)_{G_\omega + G_{\omega+1}} - f(E_0^0).$

D'une façon générale, nous désignerons, pour tout entier $n > 1$ et tout α tel que

$$(55_1^n) \qquad \alpha \,\varepsilon\, [\omega^2, \omega^2 + \omega\,(n+1)),\ f\,(e_n^{\cdot}) < g\,(\alpha),$$
$$g\,(\alpha) \text{ non } \varepsilon\, (f\,(E_0^0) + \cdots + f\,(E_{n-1}^0)),$$

par $\varphi\,(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56_1^n) \qquad \varphi\,(\alpha)\,\varepsilon\, R_\omega\,(e_n^0, \cdot)_\sigma,\ f\,(\varphi\,(\alpha)) = g\,(\alpha), \text{ et par}$$

(60_1^n) E_n^0 l'ensemble des $\varphi\,(\alpha)$, α vérifiant (18_1^n); alors

$$(61_1^n) \qquad f\,(E_n^0) = (f\,(e_n^0), \cdot)_{\sum_i G_{\omega+i}} - \sum_j f\,(E_j^0),\ (i \leq n, j < n).$$

Montrons que, par le procédé précédé, $\varphi\,(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha\,\varepsilon\,[\omega^2, \omega^2 \cdot 2)$. Pour le voir, il suffit de remarquer que tout nombre de l'ensemble (55_1) vérifie l'une des conditions (55_1^n), $(n = 0, 1, \cdots)$; puisque la fonction g est univalente dans $[\omega^2, \omega^2 \cdot 2)$, α ne vérifie qu'une seule des conditions (55_1^n).

De plus, on prouve sans peine que la fonction $\varphi\,(\alpha)$ est univalente dans $(\cdot, \omega^2 \cdot 2)$ ($\equiv$ l'ensemble des $\alpha < \omega^2 \cdot 2$).

En posant

$$(57_1) \qquad S_1 = \varphi\,([\omega^2, \omega^2 \cdot 2)) = \sum_{n<\omega} E_n^0,$$

on prouve facilement que

$$(58_1) \qquad f\,(S_1) = \sum_{n<\omega} G_{\omega+n} \quad \text{(cf. (51), (54))},$$

et que la fonction f est univalente dans S_1.

24. D'une façon générale, soit β un ordinal quelconque entre 1 et Ω, et supposons que, quel que soit l'ordinal $\xi < \beta$, l'on ait fait correspondre à tout ordinal α tel que $\omega^2\xi \leq \alpha < \omega^2\,(\xi+1)$ un certain élément $\varphi\,(\alpha)$ de $R_{(\omega\xi)^+}\,\sigma$[23]) vérifiant $f\,(\varphi\,(\alpha)) = g\,(\alpha)$ de manière que, en rangeant les éléments $\varphi\,(\alpha)$, $(\alpha\,\varepsilon\,[\omega^2\,\xi, \omega^2\,(\xi+1))$, dans la suite

$$(59_\xi) \qquad e_n^\xi, e_1^\xi, \cdots, e_n^\xi, \cdots, (n<\omega, e_m^\xi \neq e_n^\xi, m \neq n),$$

et en désignant par S_ξ l'ensemble des e_n^ξ, $(n < \omega)$,

---

[23]) Pour un ordinal α, nous désignerons par α^+ le nombre $\alpha + 1$ ou α, suivant que α est de première ou de seconde espèce.

$$(57_\xi) \qquad S_\xi = \varphi([\omega^2 \xi, \omega^2 (\xi+1)),$$

et en posant

$$(57^\beta) \qquad s_\beta = \sum_\xi S_\xi\,, \ (\xi < \beta),$$

les conditions suivantes soient satisfaites:

I_β La fonction $\varphi(\alpha)$, $(\alpha < \omega^2\beta)$, est biunivoque et telle que, quels que soient les ordinaux $\xi < \eta < \omega^2\beta$, $\varphi(\eta) <\cdot\, \varphi(\varphi)$;

II_β $R_\alpha s_\beta = s_\alpha \subset R_{(\alpha\omega)} + \sigma^{23})$, $\varphi([\omega^2\alpha, \omega^2(\alpha+1)) = S_\alpha$, $(\alpha < \beta)$,

III_β $\gamma\,[e]_{s_\beta} = \gamma\, s_\beta = \beta$, $(e \varepsilon s_\beta)$ (cf. (2), (4));

IV_β La fonction f est croissante dans s_β et univalente dans $R_\alpha s_\beta$, pour tout $\alpha < \beta$; on a $f(R_\alpha s_\beta) = \sum_{n<\omega} G_{\omega\alpha+n}$, $(\alpha < \gamma\, s_\beta)$;

V'_β Quels que soient: $n < \omega$, $\alpha < \gamma\, s_\beta$ vérifiant $\alpha + 1 < \gamma\, s_\beta$; l'ensemble $f(R_0(e_n^\alpha, \cdot)_{s_\beta})$ contient l'ensemble $(f(e_n^\alpha, \cdot)_{G_{\omega\alpha+n}}$ et est donc partout dense sur l'intervalle $f(e_n^\alpha, \cdot)$ des nombres réels $> f(e_n^\alpha)$;

V''_β Quels que soient: $\alpha < \xi < \beta$ et $e \varepsilon R_\alpha s_\beta$, l'ensemble $f(R_\xi [e]_{s_\beta})$ est partout dense sur l'intervalle $(f(e), \cdot)$.

Nous allons prolonger la fonction $\varphi(\alpha), (\alpha < \omega^2\beta)$, en la définissant encore pour tout $\alpha \varepsilon [\omega^2\beta, \omega^2(\beta+1))$ de manière que les conditions $\mathrm{I}_{\beta+1}$, $\mathrm{II}_{\beta+1}$, $\mathrm{III}_{\beta+1}$, $\mathrm{IV}_{\beta+1}$, $\mathrm{V}'_{\beta+1}$ et $\mathrm{V}''_{\beta+1}$ soient satisfaites.

25. Distinguons deux cas:

Premier cas: β est de première espèce et >1. Dans ce cas, on procède d'une manière tout analogue que dans le cas précédent où fut $\beta = 1$: en considérant la suite

$$(59_{\beta-1}) \qquad e_0^{\beta-1}, \cdots, e_n^{\beta-1}, \cdots, (n < \omega, e_m^{\beta-1} \neq e_n^{\beta-1}, m \neq n),$$

soit, pour tout α tel que

(55^0_β) $\qquad \alpha \,\varepsilon\, [\omega^2\beta, \omega^2\beta+\omega),\ f(e_0^{\beta-1}) < g(\alpha),$

$\varphi(\alpha)$ un certain élément de σ tel que

(56^0) $\qquad \varphi(\alpha) \,\varepsilon\, R_\omega\,(e_0^{\beta-1},\cdot)_\sigma\,,\ f(\varphi\,(\alpha)) = g\,(\alpha)\ ;$

en désignant par $E_1^{\beta-1}$ l'ensemble de tous ces $\varphi\,(\alpha)$, on définit, par l'induction, pour tout entier $n > 0$ et pour tout α tel que

$55^n_\beta)$ $\quad \alpha \,\varepsilon\, [\omega^2\beta, \omega^2\beta+\omega\,(n+1)), f(e_0^{\beta-1}) < g\,(\alpha)\,,$

$$g\,(\alpha) \text{ non } \varepsilon\,\big(\sum_i f\,(E_i^{\beta-1})\,,\ (i < n),$$

$\varphi\,(\alpha)$ comme un certain élément de σ tel que

(56^n_β) $\qquad \varphi\,(\alpha) \,\varepsilon\, R_\omega(e_n^{\beta-1},\cdot)_\sigma\,,\ f(\varphi\,(\alpha)) = g\,(\alpha)\ ;$

l'on désigne par $E_n^{\beta-1}$ l'ensemble de tous ces $\varphi\,(\alpha)$ et l'on pose

(57_β) $\qquad S_\beta = \sum_n E_n^{\beta-1},\ (n < \omega)$

$(58_{\beta+1})$ $\qquad s_{\beta+1} = s_{\beta-1} + S_\beta$

Second cas: β est de seco.. le espèce. Soient:

$$\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_n < \cdots,\ (n < \omega)$$

une suite croissante d'ordinaux $<\beta$ tendant vers β, et

(62_β) $\quad e^0_\beta,\ e^1_\beta, \ldots, e^n_\beta, \ldots,\ (n < \omega,\ e^m_\beta \neq e^n_\beta\,,\ m \neq n)$

la suite de tous les points des S_{β_n}, $(n < \omega)$; posons

(63_β) $\quad s^\beta = \sum_F \operatorname{Sup} F \text{ (rel } \sigma)$, F parcourant tous les sous--ensembles ordonnés infinis du sous-ensemble $\sum_n S_{\beta_n}$, $(n < \omega)$, du sous-ensemble $s_\beta = \sum_\alpha S_\alpha$, $(\alpha < \beta)$, de l'ensemble σ (voir (49)). Montrons que s^β est un sous-ensemble bien déterminé

non vide de $R_{\omega\beta}\,\sigma$ et que, quel que soit $e \,\varepsilon\, s_\beta$, l'ensemble $f((e,\cdot)_{s^\beta})$ est partout dense dans l'intervale réel $(f(e),\cdot)$.

Pour cela, soient: a un nombre réel $> f(e)$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots$, $(n<\omega)$, une suite croissante de nombres réels $\to a$. En définissant α par $e \,\varepsilon\, R_\alpha s_\beta$, soient n, r deux entiers >0 vérifiant $\alpha < \beta_n$, $f(e) < a_r$. En vertu de la condition V''_β, l'ensemble $f(R_{\beta_n}[e]_{s_\beta})$ est partout dense dans $(f(e),\cdot)$; soient, alors, E_0 un certain élément de $R_{\beta_n}[e]_{\beta_n}$ tel que $e <\cdot E_0$, $a_r < f(E_0) < a_{r+1}$, et, pour tout entier $k > o$, E_k un certain élément de $R_{\beta_{n+k}}[E_{k-1}]_{s_\beta}$ tel que $E_{k-1} <\cdot E_k$, $a_{r+k} < f(E_k) < a_{r+k+1}$, et finalement

$$\bar{e} = \operatorname*{Sup}_{k<\omega} E_k\,, \text{ (rel } \sigma).$$

Vu V''_β, l'existence de $\bar{e}$ est immédiate, et manifestement $f(\bar{e})=a$. Prouvons encore que $\bar{e} \,\varepsilon\, R_{\omega\beta}\,\sigma$; pour ceci, remarquons que $E_k \,\varepsilon\, R_{\beta_{n+k}}[E_{k-1}]_{s_\beta}$, pour tout $0 < k < \omega$, ce qui, vu l'hypothèse III_β, donne $E_k \,\varepsilon\, R_{\beta_{n+k}} s_\beta$ et donc, à la suite de II_β, $E_k \,\varepsilon\, R_{\omega\delta_k}\,\sigma$ avec $(\beta_{n+k})^+ = \delta_k$ [23]); alors la relation $\bar{e} \,\varepsilon\, R_{\omega\beta}\,\sigma$ (et à fortiori la relation $s^\beta \subseteq R_{\omega\beta}\,\sigma$) résulte de ce que $\delta_k \to \omega\beta$ avec $k \to \omega$.

L'existence du sous-ensemble s^β de $R_{\omega\beta}\,\sigma$ étant établie, reprenons la suite (62_β) des points $\overset{n}{e}_\beta$, $(n < \omega)$, et définissons $\varphi(\alpha)$, pour tout $\alpha \,\varepsilon\, [\omega^2\beta, \omega^2(\beta+1))$, comme il suit:

Pour tout α vérifiant

$$(55^\beta_0) \qquad \omega^2\beta < \alpha < \omega^2\beta + \omega,\ f(\overset{0}{e}_\beta) < g(\alpha)\,,$$

soit $\varphi(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56^\beta_0) \qquad \varphi(\alpha) \,\varepsilon\, (\overset{0}{e}_\beta, \cdot)_{s^\beta}\,,\ f(\varphi(\alpha)) = g(\alpha)\,;$$

en désignant par $\overset{0}{E}_\beta$ l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$, soient, pour

tout entier $n>0$ et tout α tel que

$$(55^{\beta}_{n})\qquad \begin{cases} \omega^2\beta<\alpha<\omega^2\beta+(\omega+n+1),\ f(e^n_\beta)<g(\alpha) \\ g(\alpha) \text{ non } \varepsilon\,(\sum_i f(E^i_\beta)),\ (i<n), \end{cases}$$

$\varphi(\alpha)$ un certain point de σ tel que

$$(56^{\beta}_{n})\qquad \varphi(\alpha)\,\varepsilon\,(e^n_0,\cdot)_{s^\beta},\ f(\varphi(\alpha))=g(\alpha),$$

et E^n_β l'ensemble de tous ces $\varphi(\alpha)$.

Puisque tout $\alpha\,\varepsilon\,[\omega^2\beta,\omega^2(\beta+1))$ vérifie une des relations (55^{β}_{n}), $(n<\omega)$ — c'est ce qui résulte de ce que l'ensemble des nombres $g(\alpha)$, $(\omega^2\beta\leq\alpha<\omega^2)\beta+1))$, est partout dense — et donc une seule à cause de l'univalence de $g(\alpha)$ dans $[\omega^2\beta,\omega^2(\beta+1))$, la fonction φ est définie dans (55_β).

En posant

$$(57_\beta)\qquad S_\beta=\sum E^n_\beta,\ (n<\omega)$$

$$(58_{\beta+1})\qquad s_{\beta+1}=\sum_\xi S_\xi,\ (\xi<\beta+1),$$

on vérifie facilement que les conditions $\mathrm{I}_{\beta+1}$, $\mathrm{II}_{\beta+1}$, $\mathrm{III}_{\beta+1}$, $\mathrm{IV}_{\beta+1}$, $\mathrm{V}'_{\beta+1}$, $\mathrm{V}''_{\beta+1}$ sons satisfaites.

26. En posant

$$(55)\qquad S=\sum_\beta S_\beta,\ (\beta<\Omega),$$

les propositions I_β—IV_β, V''_β entraînent les propositions suivantes:

I_Ω *La fonction* $\varphi(\alpha)$, $(\varphi(\alpha)\,\varepsilon\,\sigma,\ \alpha<\Omega)$, *est biunivoque et telle que, quels que soient les nombres* $\alpha<\beta<\Omega$, $\varphi(\beta)$ non $<\cdot\,\varphi(\alpha)$

II_Ω $R_\alpha S=S_\alpha=\varphi([\omega^2\alpha,\omega^2(\alpha+1))$, $(\alpha<\Omega)$; donc $\varphi(S)=$ $=(\cdot,\Omega)$;

III_Ω $\gamma[e]_S=\gamma S=\Omega$, $(e\,\varepsilon\,S)$ (voir corollaire 1);

IV_Ω *La fonction f est croissante dans S et univalente dans chaque $R_\alpha S$, $(\alpha < \Omega)$; on a*

$$(58) \qquad f(R_\alpha S) = \sum_{n<\omega} G_{\omega\alpha+n} \text{ et donc } f(S) = \sum_\alpha G_\alpha, \ (\alpha < \Omega);$$

V_Ω *Pout tout $e \varepsilon S$ et pour tout $\alpha < \Omega$ l'ensemble $f(R_\alpha(e,\cdot)_S)$ est partout dense sur l'intervalle réel $(f(e),\cdot)$* (cf. le lemme 7).

Puisque S est un sous-ensemble de σ, tous sous ensemble ordonné de S est au plus dénombrable (cf. Lemme 5) ce qui, vu les propositions II_Ω, III_Ω, prouve que S est un tableau ramifié de M. Aronszajn extrait de σ (cf. n⁰ 3)

Ainsi le Théorème d'existence est complètement démontré.

27. *Deux cas particuliers remarquables.* D'après IV_Ω, $f(S) = \sum_\beta G_\beta$, $(\beta < \Omega)$; si, alors, pour un $x \varepsilon f(S)$.

$$(65) \qquad f^{-1}(x)_S$$

désigne l'ensemble de tous les $e \varepsilon S$ vérifiant $f(e) = x$, nous aurons

$$(66) \qquad S = \sum_x f^{-1}(x)_S, \ (x \varepsilon f(S)).$$

De plus, d'après IV_Ω, $f^{-1}(x)_S$ est un sous-ensemble *disjonctif*[24]) de S tel que

$$(67) \qquad f^{-1}(x)_S \,.\, f^{-1}(x')_S = 0, \quad (x \varepsilon S, x' \varepsilon S, x \neq x').$$

La construction précédente de S dépendant essentiellement de la fonction $g(\alpha)$, $(\alpha < \Omega)$, considérons les deux cas particuliers suivants:

a) Quel que soit $\beta < \Omega$, l'ensemble des valeurs de $\varphi(\alpha)$ dans $[\omega^2\alpha, \omega^2(\alpha+1))$ [22]) coïncide avec l'ensemble de ses valeurs prises dans $[0, \omega^2)$ c'est-à-dire

$$\sum_{n<\omega} G_n = \sum_{n<\omega} G_{\omega\beta+n}, \quad (\beta < \Omega)$$

$$f(S_\beta) = f(S_0) = f(S), \ (\beta < \Omega).$$

---

[24]) Un sous-ensemble d'un ensemble partiellement ordonné est *disjonctif* s'il ne contient aucun couple de points distincts *comparables*.

Par conséquent, l'ensemble $f(S)$ est, dans ce cas, *dénombrable* et tel que pour tout $x \varepsilon f(S)$ l'ensemble $f^{-1}(x)_S$ soit de puissance $\aleph_1$; les relations (66), (67) entraînent donc le résultat suivant:

Il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn décomposable en une infinité dénombrable de ses sous-ensembles disjonctifs[24]*) deux à deux disjoints.*

b) La fonction $g(\alpha)$, $(\alpha < \Omega)$, est univalente. La fonction f étant, dans ce cas, univalente dans S, nous avons établi ce résultat:

Il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn, S, et une fonction réelle biunivoque croissante dans S, $f(e)$, $(e \varepsilon S)$, tels que, de plus quel que soit $\beta < \Omega$, l'ensemble $f(R_\beta S)$ soit partout dense sur $f(S)$.

Dans ce cas, l'ordre intégral de l'ensemble linéaire $f(S)$ peut être transplanté dans S moyennant la fonction biunivoque $f^{-1}(x)_S$, $(x \varepsilon f(s))$: on obtiendra un ensemble ordonné semblable à $f(S)$ et dont l'ordre est une extension de l'ordre primitif de S. Bref, *il y a un tableau ramifié de M. Aronszajn dont l'ordre partiel peut être élargi de manière qu'on obtienne un ensemble ordonné semblable à un ensemble linéaire*[25]) (cf. n⁰ 29 corrolaire 3 et n⁰ 30 théorème 3^{IV}).

28. *Applications.* Soient, pour tout $\beta < \Omega$,

(68) H_β un ensemble linéaire dénombrable quelconque partout dense, et

$$a_0^\beta, \ldots, a_\xi^\beta, \ldots, (\xi < \omega^2, a_\xi^\beta \neq a_\zeta^\beta, \xi \neq \zeta) \tag{65}$$

un bon ordre de l'ensemble H_β tel que, quel que soit $n < \omega$, t l'ensemble.

$$H(\beta, n) \text{ des } a_\xi^\beta, (\omega n \leq \xi < \omega(n+1)) \tag{70}$$

soit partout dense.

Manifestement, quel que soit $\beta < \Omega$,

$$H_\beta = \sum H(\beta, n), H(\beta, m) \cdot H(\beta, n) = 0, (m < n < \omega). \tag{71}$$

---

[25]) C'est la solution d'un problème de la Thèse, p. 128, en note.

En posant

$$(72) \qquad g(\omega^2\beta+\omega m+n)=a^{\beta}_{\omega m+n}, \quad (\beta<\Omega,\ m<\omega,\ n<\omega)$$

et

$$(72') \qquad \alpha=\omega^2\beta+\omega m+n,$$

$g(\alpha), (\alpha<\Omega)$, est une fonction bien déterminée de l'espèce que nous avons considérée dans ce qui précède; en employant des notations précédentes, on aura

$$(73) \qquad H_\beta=\sum_{n<\omega} G_{\omega\beta+n}$$

et, d'après II_Ω,

$$(73') \qquad H_\beta=f(S_\beta), f(S)=\sum_\beta H_\beta, (\beta<\Omega).$$

Nous avons donc établi le

Théorème 3. Quelle que soit la suite transfinie d'ensembles linéaires

$$H_0, H_1, \cdots, H_\beta, \cdots, (\beta<\Omega),$$

dont chacun est dénombrable et partout dense, le tableau ramifié σ (défini n° 18) *contient un tableau ramifié de M. Aronszajn,* S, *tel que la fonction* f (définie n° 20) *soit croissante dans* S *et univalente dans* $R_\beta S$ *et que* $f(R_\beta S)=H_\beta$, *pour tout indice* $\beta<\Omega$.

29. *Ensembles linéaires partout denses et tableaux ramifiés de M. Aronszajn.* Le théorème 3 va nous permettre d'établir le

Théorème 3bis. Quel que soit l'ensemble linéaire partout dense H *de puissance* $\leq \aleph_1$ *et ayant partout une même puissance, l'ensemble* σ *contient un tableau ram. de M. Aronszajn* S *tel que la fonction* f (définie n° 20) *y soit croissante (et univalente si* H *est non dénombrable) et telle que* $f(S)=H$.

En effet, si H est dénombrable, le théorème 3bis résulte du théorème 3 en y posant $H_\beta=H$, $(\beta<\Omega)$; si $pH=\aleph_1$, soient

$$x_0, x_1, \cdots, x_\beta, \cdots, (\beta<\Omega), x_\alpha\neq x_\beta, \alpha<\beta<\Omega)$$

tous les points de H; construisons la suite des H_β, $(\beta<\Omega)$, comme il suit: α_0 étant le premier indice $<\Omega$ tel que l'ensemble des points x_ξ, $(\xi<\alpha_0)$, soit partout dense, H_0 sera l'ensemble des x_ξ, $(\xi<\alpha_0)$; d'une façon générale, quel que soit $\beta<\Omega$, en désignant par α_β le premier ordinal $<\Omega$ tel que l'ensemble des x_ξ, $(\operatorname{Sup}_{\varsigma<\beta}\alpha_\varsigma<\xi<\alpha_\beta)$, soit partout dense, H_β sera l'ensemble des x_ξ, ξ vérifiant $\operatorname{Sup}_{\varsigma<\beta}\alpha_\varsigma\leq\xi<\alpha_\beta$.

Par le procédé inductif on démontre sans peine que, pour tout $\beta<\Omega$, l'ensemble H_β est bien déterminé, dénombrable, partout dense et que $H_\alpha H_\beta=0$ pour tout $\alpha<\beta<\Omega$. En appliquant à la suite $H_0, H_1, \cdots, H_\beta, \cdots, (\beta<\Omega)$, les raisonnements du n° 28, la fonction correspondante g sera biunivoque; il en est de même de la fonction $f(e)$, $(e\,\varepsilon\,S)$, S désignant le tableau ram. de M. Aronszajn attaché à $g(\alpha)$, $(\alpha<\Omega)$.

Corollaire 3. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il y a* (dans σ) *un tableau ram. de M. Aronszajn dont l'ordre partiel peut être élargi de façon qu'on obtienne un ensemble ordonné semblable à l'ensemble ordonné des nombres réels* (cf. la fin du n° 27; aussi théorème 3^{IV}).

30. On démontre facilement le résultat suivant:

Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable, E, il y a un ensemble linéaire H partout non dénombrable et semblable à un sous-ensemble E^0 de E tel que l'ensemble $E-E^0$ soit au plus dénombrable[26]).

Or, H contient un ensemble H^1 partout de puissance $\aleph_1$; dès lors, d'après le théorème 3bis, il y a un tableau ram. de M. Aronszajn, S, extrait de σ tel que la fonction f du n° 20 y soit biunivoque, croissante et vérifiant $f(S)=H^1$, donc aussi $f(S)\subseteq H$; en désignant par s une transformation par similitude de l'ensemble ordonné H^1 dans l'ensemble ordonné E^0, et en posant

$$f_0(e)\equiv s(f(e)),\ (e\,\varepsilon\,S)$$

[26]) Il suffit désigner par E^0 i'ensemble qu'on déduit de l'ensemble E_c des points de condensation de E appartenant à E, en barrant dans E_c tous les points consécutifs de E_c aussi bien que l'(es) extrémité(s) éventuelle(s) de E_c.

on a $f(S)=E^0$ puisque $f(S)=H^1$; dès lors le

Théorème 3ter. Quel que soit l'ensemble linéaire non dénombrable E, il y a un tableau ramifié de Aronszajn S (extrait de σ) *et une fonction biunivoque f_0 croissante dans S tels que $f_0(S) \subseteq E$; dans le cas où la puissance E est $\aleph_1$, on peut faire de manière que l'ensemble $E - f_0(S)$ soit au plus dénombrable.*

Enfin, on peut prouver sans peine le

Théorème 3IV Pour qu'un ensemble linéaire E puisse être obtenu en élargissant ordre partiel d'un tableau ram. de M. Aronszajn, il faut et il suffit que, quel que soit le point x de E, l'ensemble des points de E à droite de x soit de la puissance $\aleph_1$.

31. La démonstration précédente de l'existence de tableax ramifiés de M. Aronszajn s'exprime entièrement en termes d'ordre, sans faire appel à aucune notion métrique.

En imitant le raisonnement primitif de M. Aronszajn par lequel il a démontré, le premier, l'existence de tableaux ramifiés portant son nom[27]), voici comment on procéderait dans le cas concret qui nous occupe (c'est-à-dire pour prouver l'existence d'un tableau ram. de M. Aronszajn dans l'ensemble σ [cf. le problème 1 ci-après]).

On pose $S_0 = R_0\,\sigma$; si $0 < \beta < \Omega$, on définira S_β comme il suit: si β est de première espèce, $S_\beta = \sum_e R_0\,(e,\cdot)_\sigma$, $(e \,\varepsilon\, S_{\beta-1})$; si β est de seconde éspece, soit $0=\beta_0<\beta_1<\cdots<\beta_n<\cdots$, $(n<\omega)$, une suite croisante d'indice $<\beta$ tendant vers β. Soit r un entier positif quelconque; soient $\alpha<\beta$ et $e \,\varepsilon\, S_\alpha$ quelconques; i vérifiant $\beta_{i-1} \leq \alpha<\beta_i$, soit e^1 un élément de S_{β_i} tel que $e <\cdot\, e^1$ et $f(e^1)-f(e) < \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2^2}$; d'une façon générale, quel que soit l'entier $k>1$, soit e^k un certain élément de $S_{\beta_{i+k}}$ tel que

$$e^{k-1} <\cdot\, e^k,\ f(e^k)-f(e^{k-1}) < \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{2^{2k}}\text{; en posant}$$

$$e(r) = \operatorname*{Sup}_{k<\omega} e^k\,,\ (\text{rel } \sigma),$$

---

27) Voir ma Thèse, loc. cit. p. 96 en note (cf. aussi n° 16 ci-dessus).

$e(r)$ est un certain point de σ tel que $e <\cdot e(r)$; alors, S_β sera, par définition, l'ensemble des $e(r)$; e, r parcourant indépendamment l'ensemble $\sum_\alpha S_\alpha$, $(\alpha < \beta)$ et les entiers >0 respectivement.

De proche en proche, on démontre l'existence de S_β pour tout $\beta < \Omega$ et on vérifie que l'ensemble $S = \sum_\beta S_\beta$, $(\beta < \Omega)$, est un tableau ramifié de M. Aronszajn (on a d'aillers $R_\beta S = S_\beta$ pour tout $\beta < \Omega$).

32. *Deux problèmes.* A propos des démonstrations précédentes de l'existence de tableaux ramifiés de M. Aronszajn dans le tableau ramifié σ, voici le

Problème 1. Soit T un tableau ramifié quelconque tel que $\gamma[a]_T = \gamma T = \Omega$, $(a \varepsilon T)$; s'il existe dans T une fonction réelle uniforme croissante, l'ensemble T contient-il un tableau ramifié de M. Aronszajn?

Et pour terminer, voici un problème bien intéressant :

Problème 2. Existe-il dans l'ensemble σ (voir n° 18) *une fonction uniforme croissante à valeurs rationelles?*