Equazione differenziale delle asintotiche di particolari superfici

Di

LUIGI CONTE

Il sig. Mitrinovitch[1]) ha posto delle condizioni, verificate le quali l'equazione differenziale delle linee asintotiche della superficie

$$x=x(u,v)\ ,\qquad y=y(u,v)\ ,\qquad z=z(u,v) \tag{1}$$

si riduce a un'equazione differenziale di questa forma

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2+a(u\,,\,v)\frac{du}{dv}-1=0\ .$$

Nella Nota presente s'indica un'estensione di questo risultato, ottenuta mediante un procedimento analogo a quello seguito dal sig. Mitrinovitch.

1. Considerando una superficie sotto la forma (1) l'equazione differenziale delle sue linee asintotiche sarà:

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0 \tag{2}$$

ove, in forma abbreviata,

---

1) Vedi: *Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique.* Tome I. Fasc. II—1936.

$$
(3) \qquad
\begin{gathered}
D = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \; \frac{\partial x}{\partial u}, \; \frac{\partial x}{\partial v} \right| ; \quad D' = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v}, \; \frac{\partial x}{\partial u}, \; \frac{\partial x}{\partial v} \right| ; \\
D'' = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \; \frac{\partial x}{\partial u}, \; \frac{\partial x}{\partial v} \right| .
\end{gathered}
$$

Dette λ e μ due costanti reali, esaminiamo in quale caso si avrà

$$
\text{(a)} \qquad D'' + \lambda D' + \mu D = 0 .
$$

Tenendo presente le (3) e posto

$$
A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} ; \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} ; \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}
$$

la (a) si scrive

$$
\begin{aligned}
A \cdot \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right\} + B \cdot \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right\} + \\
+ C \cdot \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right\} = 0 .
\end{aligned}
$$

Perchè questa relazione sia identicamente verificata, *basta* che le funzioni x, y, z soddisfino all'equazione alle derivate parziali del secondo ordine:

$$
(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = 0 .
$$

Si perviene così al risultato: *Condizione sufficiente perchè l'equazione differenziale delle asintotiche* (2) *delle superfici* (1) *abbia la forma*

$$
\left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2 \frac{D'}{D} \frac{du}{dv} - \frac{\lambda D' + \mu D}{D} = 0
$$

è che le x, y, z *siano soluzioni qualunque dell'equazione* (α)

In particolare: a) per $\lambda = 0$, $\mu = -a^2$, oppure per $\lambda = 0$, $\mu = 1$ si ritrovano i risultati ottenuti da D. Mitrinovitch[1]).

b) per $\lambda=2$, $\mu=1$, la (2) si scinde in:

$$u=v+\text{costante}\ , \qquad u=-v-2\int\frac{D'}{D}\,dv+\text{costante}\,.$$

2. Più in generale, possiamo dire: *Perchè l'equazione differenziale delle asintotiche dell'equazione* (1) *si riduca a*

$$\frac{du}{dv}=\frac{-D'\pm\sqrt{D'^2+\varphi_1\,DD'+\varphi_2\,D^2}}{D}\,,$$

con φ_1 et φ_2 funzioni note di u e v, condizione sufficiente è che x, y, z siano soluzioni qualunque dell'equazione

$$(\alpha')\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\varphi_1(u,v)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\varphi_2(u,v)\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=0\,.$$