Sur la réduction d'un déterminant à la diagonale principale

Par

T. PÉYOVITCH

1. Soit donné un déterminant d'ordre n

$$(1) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Transformons ce déterminant, d'après Boggio[1]), en un autre ayant la même valeur, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n1} \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} b_{1k} &= a_{1k} \ , \\ b_{2k} &= a_{2k} - m_{21}\, b_{1k} \ , \\ b_{3k} &= a_{3k} - m_{31}\, b_{1k} - m_{32}\, b_{2k} \ , \\ b_{4k} &= a_{4k} - m_{41}\, b_{1k} - m_{42}\, b_{2k} - m_{43}\, b_{3k} \end{aligned}$$

---

1) Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série, t. XXXV, 1911, p. 113, première Partie.

et, en général,

$$b_{ik}=a_{ik}-\sum_{r=1}^{i=1} m_{ir}\, b_{rk} \qquad (i, k=1, 2, \cdots, n),$$

les coefficients m_{ir} étant des constantes quelconques.

Si l'on choisit les coefficients m_{ir} de manière que l'on ait

$$(3) \qquad b_{ik}=a_{ik}-\sum_{r=1}^{i-1} m_{ir}\, b_{rk}=0 \qquad (k<i),$$

c'est-à-dire que tous les éléments du déterminant (2) au-dessous de la diagonale principale soient égaux à zero, on aura

$$\Delta_n=b_{11}\, b_{22} \cdots b_{nn} \; .$$

Par conséquent, *la valeur du déterminant Δ_n, donnée par l'équation* (2), *est ramenée, d'après les équations* (3), *au produit des éléments de la diagonale principale.*

Les coefficients m_{ir} sont donnés, d'après les équations (3), par les formules suivantes

$$(4) \qquad m_{ir}=\frac{\Delta_{ir}}{\Delta_{rr}} \qquad \begin{pmatrix} r=1, 2, \cdots, n-1 \\ i=2+1, r+2, \cdots, n \end{pmatrix};$$

Δ_{rr} étant le mineur de l'ordre $n-r$ du déterminant (1), qui s'obtient en barrant les $n-r$ dernières lignes et les $n-r$ dernières colonnes du déterminant (1); Δ_{ir} étant aussi le mineur de l'ordre $n-r$ du déterminant (1) qui s'obtient du mineur Δ_{rr} en y remplaçant les éléments de la $r^{\text{ème}}$ ligne par les éléments correspondants de la $i^{\text{ème}}$ ligne du déterminant (1).

Par exemple

$$m_{i1}=\frac{\Delta_{i1}}{\Delta_{11}}=\frac{a_{i1}}{a_{11}},$$

$$m_{i2}=\frac{\Delta_{i2}}{\Delta_{22}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} & a_{i2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$m_{i3}=\frac{\Delta_{i3}}{\Delta_{33}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

et, en général,

$$m_{ir}=\frac{\Delta_{ir}}{\Delta_{rr}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \cdots & a_{r-1\,r} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \cdots & a_{r-1\,r} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}.$$

Posons, par exemple, $i=r+1$, on aura

$$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}},$$

$$m_{32}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$m_{43}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

. . . .

Si les valeurs absolues des éléments a_{ik} du déterminant (1) ne dépassent pas un nombre positif A et celles des coefficients m_{ir}, donnés par la formule (4), ne dépassent pas un nombre positif M, *la valeur maximum du module du déterminant* (1) *est donnée par la formule*[1])

$$(5) \qquad |\Delta_n| \leqslant A^n (1+M)^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

En faisant la comparaison entre la formule (5) et celle de M. Hadamard

$$(6) \qquad \Delta_n = A^n n^{\frac{n}{2}} ,$$

on obtient le résultat suivant (voir mon article cité):

Si l'on a $M < \sqrt[n-1]{n} - 1$, *la valeur maximum du module du déterminant* (1), *donnée par la formule* (5), *est plus petite que celle donnée par la formule* (6) *de M. Hadamard.*

Supposons que l'on ait

$$M \leqslant \frac{1}{n-1} ,$$

la formule (5) devient

$$(5') \qquad |\Delta_n| \leqslant A^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

De l'inégalité[2])

$$M \leqslant \frac{1}{n-1} \leqslant \sqrt[n-1]{n} - 1 ,$$

n étant l'ordre du déterminant (1), il résulte que la valeur maximum du module du déterminant (1), donnée par la formule (5'), est plus précise que celle donnée par la formule (6).

Par conséquent, nous avons le théorème suivant:

1. *Si l'on a* $M \leqslant \frac{1}{n-1}$, *n étant l'ordre du déterminant* (1), *la valeur maximum du module du déterminant* (1), *donnée par la*

1) Voir mon article: „*Contribution à l'étude de la valeur maximum du module d'un déterminant*" (*Journal de Mathématiques pures et appliquées, volume jubilaire dédié à M. Jacques Hadamard, 1937—1938*).

2) $\frac{1}{n-1} \leq \sqrt[n-1]{n-1}$, $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq n$.

formule (5) *c'est-à-dire par la formule* (5'), *est plus précise que celle donnée par la formule* (6) *de* ***M.*** *Hadamard.*

2. Considérons maintenant le déterminant d'ordre $n+1$ de la forme

$$(7) \qquad \Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & 1\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_3\cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

où a_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ sont des nombre entiers positifs satisfaisant à la condition $a_i\geqslant n$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$, $n+1$ étant l'ordre du déterminant (7). La valeur maximum du module du déterminant (7) est donnée par la formule

$$(8) \qquad |\Delta_{n+1}|\leqslant A^{n+1}(1+M)^{\frac{n(n+1)}{2}};$$

A étant la valeur absolue des éléments a_i, M la valeur absolue des coefficients m_{ir}.

Les coefficients m_{ir} sont donnés, d'après (4), par les équations

$$(9) \qquad m_{ir}=\frac{\Delta_{ir}}{\Delta_{rr}}=-\frac{\Delta_{r-1\;r-1}}{a_{r-1}\Delta_{r-1\;r-1}+\Delta_{r-2\;r-2}} \quad \begin{pmatrix}\Delta_{11} & =a_0 \\ \Delta_{00} & =1 \\ \Delta_{-1-1} & =0\end{pmatrix}.$$

Puisque les éléments a_i du déterminant (7) sont des nombres entiers positifs, tous les mineurs $\Delta_{r-1\;r-1}$ $(r=1,2,\cdots,n)$ sont positifs. Il s'ensuit, d'après (9) et la dite condition $a_i\geqslant n$, que l'on a

$$(10) \qquad |m_{ir}|\leqslant M\leqslant\frac{1}{n} \qquad \begin{pmatrix}r=1,2,\cdots,n \\ i=r+1,\cdots,n+1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, *la valeur maximum du module du déterminant (7), donnée par la formule* (8) *ou, d'après (10), par la formule*

$$|\Delta_{n+1}| \leqslant A^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

est plus précise que celle donnée par la formule de M. Hadamard.

Remarquons enfin que le déterminant (7) joue un rôle important dans la fraction continue de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}},$$

car il représente le numérateur de la réduite $\frac{p_{on}}{q_{on}}$ de l'ordre n de la fraction continue ci-dessus. Le dénominateur q_{on} s'obtient du numérateur p_{on}, c'est-à-dire du déterminant (7) en y barrant la première ligne et la première colonne.