

Elementare Ableitung der nichteuklidischen Geometrien

Von

BRANISLAV PETRONIEVICS

1.

Einleitende Vorbemerkung

Während bekanntlich *Lobatschewsky* und *Bolayi* die nicht-euklidische Geometrie in engstem Anschluss an Euklids V-es Postulat (indem sie dasselbe negierten) begründet haben, hatten sich ihre beiden bedeutendsten Vorgänger, *Sacheri* und *Lambert*, auf einen allgemeineren Standpunkt gestellt, der auch die nicht-euklidische Geometrie ohne Parallele in sich schloss¹⁾. *Sacheri* und *Lambert* stellten bekanntlich die drei Hypothesen des rechten, des stumpfen und des spitzen Winkels auf, indem dabei von *Sacheri* das zweirechtwinkelige und von *Lambert* das dreirechtwinkelige Viereck den drei Hypothesen zu Grunde gelegt

¹⁾ Auch die weitaus bedeutendste neuere auf einem umfassenden Postulatensystem beruhende Begründung der (euklidischen und der) allgemeinen Geometrie, diejenige von *D. Hilbert* (vgl. dessen „Grundlagen der Geometrie“, 5-te Aufl. 1922), steht in dieser Hinsicht hinter dem Standpunkt von *Sacheri*—*Lambert* zurück. Bekanntlich müssen im Hilbert'schen Postulatensystem gewisse Postulate der Anordnung und der Verknüpfung abgeändert werden, damit das Parallelenpostulat durch das Postulat von keiner Parallelen ersetzt werden könne (vgl. z. B. *W. Dieck*, Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene, 1918, s. 13—17), während keine solche Aenderung nötig ist, wenn das Parallelenpostulat durch dasjenige zweier Parallelen ersetzt wird. Vgl. darüber z. B. bei *R. Balhus*, Nichteuklidische Geometrie, 1927, s. 147 im Zusammenhang mit s. 72 f.

wurde²⁾. In der vorliegenden Abhandlung habe ich eine elementare Neubegründung der nichteuklidischen Geometrien (resp. der allgemeinen Geometrie) im Geiste von *Sacheri*—*Lambert* versucht. Ich gehe dabei von dem Satze von der Existenz zweier eine gemeinsame Senkrechte besitzenden Geraden in der Ebene aus und ersetze die drei Hypothesen von *Sacheri* und *Lambert* durch die drei Postulate der gleichen, der kleineren und der grösseren Senkrechten. Das Lambert'sche Viereck stellt daher meine Grundfigur dar, während bei den Beweisen selbst, die erheblich einfacher als die entsprechenden Beweise von *Sacheri* und *Lambert* sind, auch das Sacherische Viereck benutzt wird.

Die Abhandlung weicht vom *Sacheri*—*Lambert*'schen Verfahren insofern ab, dass in ihren Beweisen weder von dem *Postulat des Archimedes*³⁾ noch von demjenigen der *Stetigkeit* Gebrauch gemacht wird. In ihr ist die Untersuchung bis zu den drei Lehrsätzen über Aequidistanz, Konvergenz und Divergenz zweier eine gemeinsame Senkrechte besitzenden Geraden fortgeführt worden, wobei, im Falle des Postulats der kleineren Senkrechten, die nichtarchimedische Ebene als die ursprüngliche vorausgesetzt wird (vgl. die Anmerkung zu Lehrsatz 44). Die Einführung der Nichtschneidenden und der Parallelen würde dann keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr einschliessen, fällt aber ausserhalb des Rahmens dieser Abhandlung.

Ob die hier versuchte Neubegründung auch vom Standpunkte der strengen Postulatenlehre („Aitematik“ und nicht „Axiomatik“ sollte, nebenbei gesagt, diese Lehre heissen) logisch gerechtfertigt sei, auf diese Frage kann hier nicht eingegangen werden. Dass sich dieselbe aber, angesichts ihrer Anschaulichkeit und logischer Durchsichtigkeit, zur ersten Einführung in die allgemeine Geometrie besser eignet als die übliche

²⁾ Die Abhandlungen von *Sacheri* und *Lambert* findet man abgedruckt in *Engel-Stäckel*, Die Theorie der Parallelinien von Euklid bis auf Gauss, 1895, s. 45—135 und s. 152—207.

³⁾ Auch *Lambert* weist bekanntlich in seinen Beweisen eine deutliche Tendenz auf, sich von diesem Postulat zu befreien. Erst *M. Dehn* und, nach ihm, *R. Bonola* gelang es aber, bei den Beweisen einiger Sätze der allgemeinen Geometrie vom diesem Postulat keinen Gebrauch mehr zu machen (vgl. darüber bei *R. Bonola*, Die nichteuklidische Geometrie, übers. v. H. Liebmann, 3-te Aufl. 1921, s. 27—31).

Begründung durch die Parallelenpostulate, dürfte dem aufmerksamen Leser dieser Abhandlung ohne weiters einleuchten.

Die Neubegründung folgt nun in einer fortlaufenden Reihe von Lehrsätzen, bei deren Beweisen, ausser Postulaten der Kongruenz und Kongruenzsätzen über Dreiecke, einige Postulate der Anordnung und Verknüpfung sowie einige von diesen abhängige Sätze als gültig vorausgesetzt werden.

2.

Lehrsätze

Der erste Lehrsatz bezieht sich auf die Existenz der zwei eine gemeinsame Senkrechte besitzenden Geraden, der zweite auf die Gleichheit der Scheitelwinkel im zweirechtwinkligen gleichschenkeligen Viereck, die Lehrsätze 3—11 beziehen sich auf die Formulierung der Postulate, während in Lehrsätzen 12—20 deren Allgemeinheit festgestellt wird. Lehrsätze 21—38 beziehen sich auf die Winkelsumme im Dreieck und Viereck. In den Lehrsätzen 39—44 werden schliesslich die Grössenverhältnisse, die zwischen den aufeinanderfolgenden Winkeln und zwischen den aufeinanderfolgenden Senkrechten in den drei Postulatenfällen bestehen, bestimmt.

Lehrsatz 1. *In der Ebene gibt es zu jeder Geraden eine andere Gerade, die mit ihr eine gemeinsame Senkrechte hat.*

Beweis. In einem Punkte einer Geraden gibt es stets eine (und nur eine) Gerade die senkrecht auf ihr steht. Diese Senkrechte wird offenbar die gemeinsame Senkrechte zwischen der gegebenen und der auf ihr senkrechten Geraden darstellen.

Lehrsatz 2. *Wenn in einem zweirechtwinkligen Viereck die zwei den rechten Winkeln anliegenden Seiten einander gleich sind, so sind die zwei anderen Winkel ebenfalls einander gleich*

Beweis. In dem Viereck $ABCD$ (Fig. 1) ist $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ ($AB=CD$, $\sphericalangle A=C=R$, $AC=AC$), woraus $\sphericalangle ACB=\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD$. Es ist dann weiter $\triangle ADB \cong \triangle BCD$ ($AD=BC$, $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD$, $AB=CD$), woraus $\sphericalangle ABD=\sphericalangle CDB$.

Lehrsatz 3. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte mit der gemeinsamen Senkrechten von gleicher Grösse ist, so ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein rechter.

Beweis. Aus Lehrsatz 2 folgt unmittelbar dass, wenn in dem dreirechtwinkligen Viereck $ABCD$ (Fig. 2) $CD=AB$ ist, $\sphericalangle CDB (=ABD) = R$ sein muss.

Anmerkung. Die Voraussetzung, die zweite Senkrechte sei der gemeinsamen Senkrechten gleich, wollen wir kurz das *Postulat der gleichen Senkrechten* nennen.

Lehrsatz 4. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte grösser als die ge-

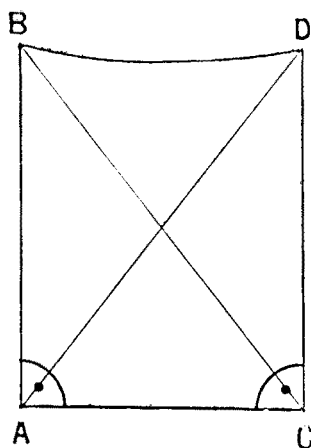


Fig. 1

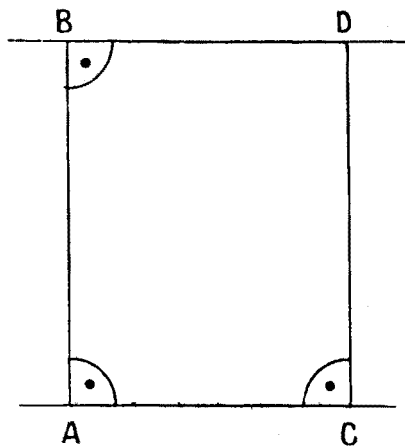


Fig. 2

meinsame Senkrechte ist, so ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein spitzer.

Beweis. Da der Voraussetzung gemäss $CD > AB$ (Fig. 3), so mache man $CE = AB$. Dann ist einerseits (nach Eukl. I, 16) $\sphericalangle CEB > CDB$ und andererseits (nach Lehrsatz 2) $\sphericalangle CEB = ABE$. Es ist somit $\sphericalangle CDB (< CEB = ABE) < R$.

Anmerkung. Die Voraussetzung, die zweite Senkrechte sei grösser als die gemeinsame Senkrechte, wollen wir das *Postulat der grösseren Senkrechten* nennen.

Lehrsatz 5. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte kleiner als die gemeinsame Senkrechte ist, so ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein stumpfer.

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $CD = AB$, $CD < AB$ und $CD > AB$ (Fig. 6).

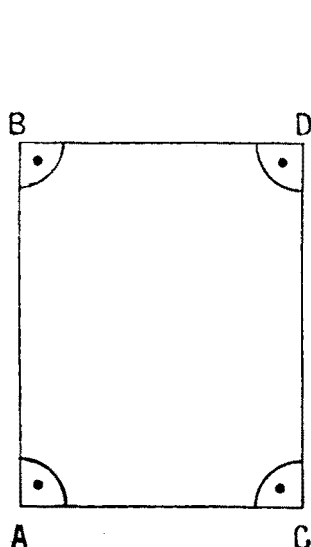


Fig. 5

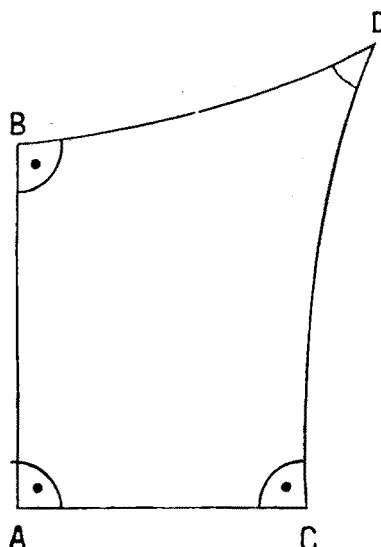


Fig. 6

Wäre $CD = AB$, dann müsste, nach Lehrsatz 3, $\sphericalangle CDB = R$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre $CD < AB$, dann müsste, nach Lehrsatz 5, $\sphericalangle CDB > R$ sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Es kann somit nur $CD > AB$ sein.

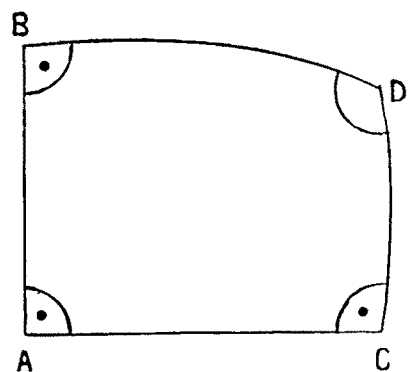


Fig. 7

Lehrsatz 8. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte mit der anderen Geraden einen stumpfen Winkel einschliesst, so ist diese zweite Senkrechte kleiner als die gemeinsame Senkrechte.

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $CD = AB$, $CD > AB$ und $CD < AB$ (Fig. 7).

Wäre $CD=AB$, dann müsste, nach Lehrsatz 3, $\sphericalangle CDB = R$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre $CD > AB$, dann müsste, nach Lehrsatz 4, $\sphericalangle CDB < R$ sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Es kann somit nur $CD < AB$ sein.

Lehrsatz 9. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte von gleicher Grösse mit der gemeinsamen Senkrechten ist, dann ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck auch die zweite dem vierten Winkel anliegende Seite gleich der ihr gegenüberliegenden Seite.*

Beweis. In dem dreirechtwinkligen Viereck $ABCD$ der Fig. 2 ist, nach Lehrsatz 3, $\sphericalangle CDB = R$. Nach Lehrsatz 6 muss dann auch $BD=AC$ sein (zunächst in dem Viereck $ACBD$ und sodann auch in dem Viereck $ABCD$).

Lehrsatz 10. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte grösser als die gemeinsame Senkrechte ist, dann ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck auch die zweite dem vierten Winkel anliegende Seite grösser als die ihr gegenüberliegende Seite.*

Beweis. In dem dreirechtwinkligen Viereck $ABCD$ der Fig. 3 ist, nach Lehrsatz 4, $\sphericalangle CDB < R$. Nach Lehrsatz 7 muss dann auch $BD > AC$ sein.

Lehrsatz 11. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte kleiner als die gemeinsame Senkrechte ist, dann ist in dem so entstehenden dreirechtwinkligen Viereck auch die zweite dem vierten Winkel anliegende Seite kleiner als die gemeinsame Senkrechte.*

Beweis. In dem dreirechtwinkligen Viereck der Fig. 4 ist, nach Lehrsatz 5, $\sphericalangle CDB > R$. Nach Lehrsatz 8 muss dann auch $BD < AC$ sein.

Lehrsatz 12. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte von gleicher Grösse mit der gemeinsamen Senkrechten ist, so wird auch jede dritte Senkrechte von gleicher Grösse mit der gemeinsamen Senkrechten sein,*

Beweis. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nach der Lage der dritten Senkrechten.

Erster Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen und auf *derselben* Seite wie die zweite.

Es sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden: $EF > AB$, $EF < AB$ und $EF = AB$ (Fig. 8).

Wenn $EF > AB$ vorausgesetzt wird, so mache man $EG = AB (= CD)$. Dann ist in dem Viereck $ABGE$, nach Lehrsatz 2,

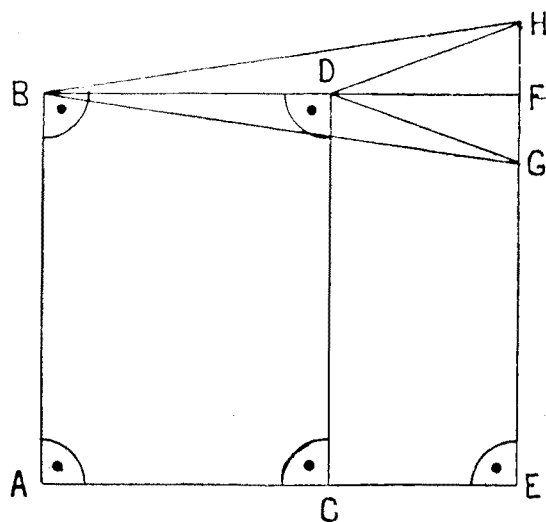


Fig. 8

$\angle ABG = EGB$ und in dem Viereck $CDGE$, nach demselben Lehrsatz, $\angle CDG = EGD$. Nun ist (nach Euklid I, 16) $\angle FDG > \angle DBG$ und somit $\angle ABG > CDG$. Es wäre also $\angle EGB > EGD$ (weil $\angle EGB = ABG > CDG = EGD$). Es ist aber andererseits $\angle EGB < EGD$. Man hätte somit $\angle EGB > EGD$, was unmöglich ist. Es kann also EF nicht $> AB$ sein.

Wird $EF < AB$ vorausgesetzt, so mache man $EH = AB$. Dann ist (in dem Viereck $ABHE$) $\angle ABH = EHB$ und (in dem Viereck $CDHE$) $\angle CDH = EHD$. Nun ist (Euklid I, 16) $\angle HDF > \angle HBD$ und somit $\angle CDH > ABH$. Es wäre also $\angle EHB < EHD$, während andererseits $\angle EHB > EHD$. Man hätte somit $\angle EHB < EHD$, was unmöglich ist. Es kann also EF nicht $< AB$ sein.

Es muss somit $EF=AB(=CD)$ sein. Da man nun die Beweisführung für EF auf jede andere Senkrechte dieser Art anwenden kann, so muss jede dritte Senkrechte dieser Art von gleicher Grösse mit der gemeinsamen Senkrechten sein.

Zweiter Fall. Die dritte Senkrechte liegt *innerhalb* der beiden anderen.

Es sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden: $EF > AB$, $EF < AB$ und $EF = AB$ (Fig. 9).

Wird $EF > AB$ vorausgesetzt, so mache man $EG = AB (= CD)$. Dann ist $\sphericalangle ABG = \sphericalangle EGB$ und $\sphericalangle EGD = \sphericalangle CDG$. Nun ist (Euklid I, 16) $\sphericalangle EGB > \sphericalangle GFB$ und $\sphericalangle EGD > \sphericalangle GFD$, also $\sphericalangle EGB + \sphericalangle EGD > 2R$. Andererseits ist $\sphericalangle EGB + \sphericalangle EGD < 2R$ (weil $\sphericalangle EGB = \sphericalangle ABG < R$ und $\sphericalangle EGD = \sphericalangle CDG < R$). Es wäre somit $\sphericalangle EGB + \sphericalangle EGD \gtrless 2R$, was unmöglich ist. Es kann somit EF nicht $> AB$ sein.

Wird $EF < AB$ vorausgesetzt, so mache man $EH = AB (= CD)$. Dann ist $\sphericalangle ABH = \sphericalangle EHB$ und $\sphericalangle CDH = \sphericalangle EHD$. Es wäre dann $\sphericalangle EHB + \sphericalangle EHD \gtrless 2R$, was unmöglich ist. Es kann somit EF nicht $< AB$ sein.

Es muss somit $EF = AB$ sein.

Da man nun die Beweisführung für EF auf jede andere Senkrechte dieser Art anwenden kann, so muss jede dritte Senkrechte dieser Art von gleicher Grösse mit der gemeinsamen Senkrechten sein.

Drittel Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen aber auf der *entgegengesetzten* Seite.

Da sich dieser Fall auf den ersten zurückführen lässt, indem man die zweite Senkrechte als die gemeinsame und diese als die zweite betrachtet, so ist damit unser Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

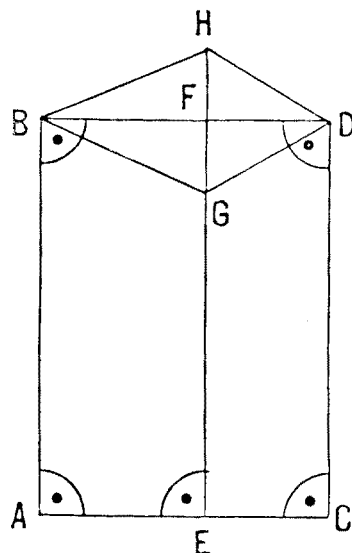


Fig. 9

Lehrsatz 13. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte grösser als die gemeinsame Senkrechte ist, so wird auch jede dritte Senkrechte grösser als die gemeinsame Senkrechte sein.

Beweis. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nach der Lage der dritten Senkrechten.

Erster Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen und auf *derselben* Seite wie die zweite.

Es sind drei Möglichkeiten zu unterscheiden: $EF=AB$, $EF<AB$ und $EF>AB$ (Fig. 10).

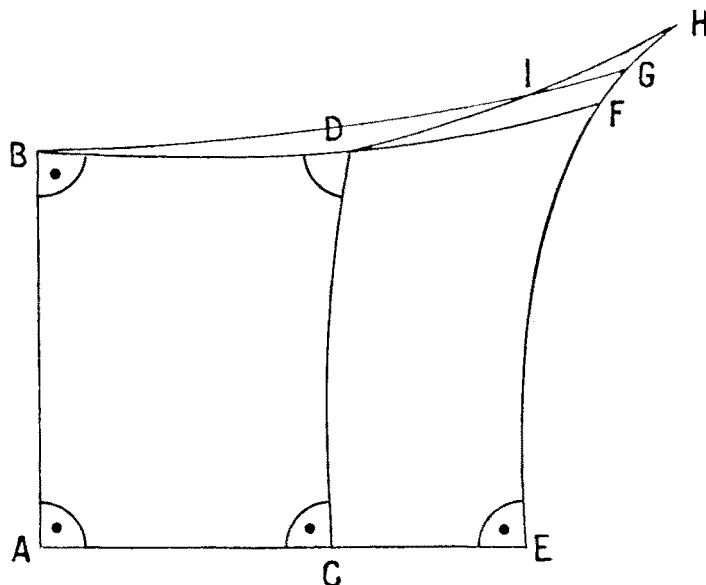


Fig. 10

Wäre $EF=AB$, dann müsste, nach Lehrsatz 12 zweiter Fall, auch $CD=AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann somit EF nicht $=AB$ sein.

Wird aber $EF<AB$ vorausgesetzt, so mache man $EG=AB$ und $EH=CD$. Dann ist $\sphericalangle ABG=\sphericalangle EGB$ und $\sphericalangle CDH=\sphericalangle EHD$. Nun ist $\sphericalangle HDF>\sphericalangle GBD$ und (da $\sphericalangle FDC>\hat{R}$) $\sphericalangle ABG<\sphericalangle CDH$. Es wäre also $\sphericalangle EGB<\sphericalangle EHD$, während andererseits $\sphericalangle EGB>\sphericalangle EHD$ ist. Man hätte somit $\sphericalangle EGB<\sphericalangle EHD$, was unmöglich ist. Es kann also EF nicht $<AB$ sein.

Es muss somit EF (sowie jede dritte Senkrechte dieser Art) $>AB$ sein.

Zweiter Fall. Die dritte Senkrechte liegt *innerhalb* der beiden anderen (Fig. 11).

Wäre $EF=AB$ dann müsste, nach Lehrsatz 12 erster Fall, auch $CD=AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre $EF<AB$ dann müsste, nach Lehrsatz 14 erster Fall, auch $CD<AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Es kann somit nur EF (sowie jede dritte Senkrechte dieser Art) $>AB$ sein.

Anmerkung. Wenn wir uns beim Beweisen dieser zweiten Möglichkeit des zweiten Falls auf den ersten Fall des nächsten Lehrsatzes berufen, so liegt dabei kein Zirkel im Beweisen vor, da dieser letztere Fall ganz unabhängig vom Lehrsatz 13 bewiesen wird. Wer jedoch diese Berufung auf einen späteren Lehrsatz vermeiden will, hat entweder für diese zweite Möglichkeit einen selbständigen Beweis zu liefern, oder Lehrsätze 13 und 14 durch andere zu ersetzen, die sich nur auf (von der zweiten Senkrechten) ferner gelegene Senkrechte beziehen, und auf diese zwei weitere folgen zu lassen, die die zweiten Fälle von Lehrsatz 13 und 14 in sich enthalten würden.

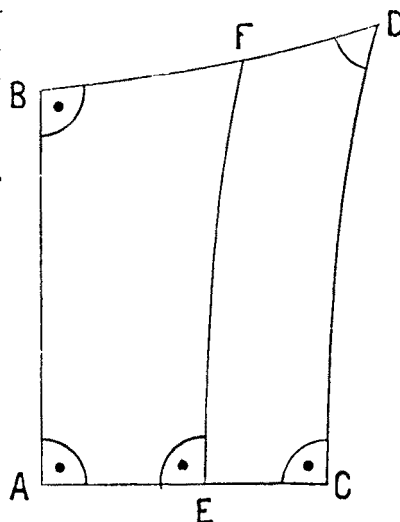


Fig. 11

Dritter Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen aber auf der *entgegengesetzten* Seite (Fig. 12).

Da sich in diesem Falle stets eine, entweder zwischen der gemeinsamen und der zweiten Senkrechten oder ausserhalb dieser beiden und auf derselben Seite wie die zweite, gelegene Senkrechte auffinden lässt, die mit der dritten Senkrechten von gleicher Grösse ist (diese Grössengleichheit folgt aus der Kongruenz von Dreiecken AEB und AGB und von Dreiecken EFB

und GHB in Fig. 12, in der $AG=AE$ ist), so führt sich dieser dritte entweder auf den zweiten oder auf den ersten Fall zurück.

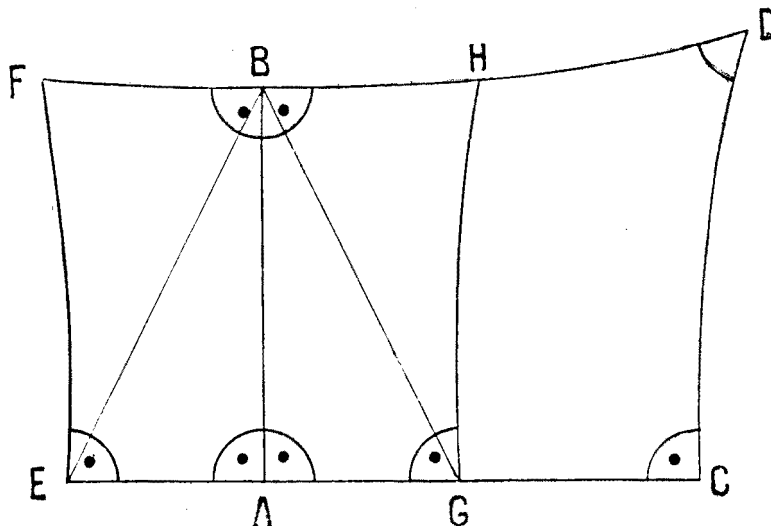


Fig. 12

Und damit ist unser Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

Lehrsatz 14. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn eine zweite Senkrechte kleiner als die gemeinsame Senkrechte ist, dann ist auch jede dritte Senkrechte kleiner als die gemeinsame Senkrechte.

Beweis. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nach der Lage der dritten Senkrechten.

Erster Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen und auf *derselben* Seite wie die zweite.

Es ist entweder $EF=AB$, oder $EF>AB$, oder $EF<AB$ (Fig. 13).

Wäre $EF=AB$ dann müsste, nach Lehrsatz 12 zweiter Fall, auch $CD=AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wird $EF>AB$ vorausgesetzt, so mache man $EG=AB$ und $EH=CD$. Dann ist $\sphericalangle ABG=\angle EGB$ und $\sphericalangle CDH=\angle EHD$. Nun ist $\sphericalangle HDF>\angle GBD$ und (da $\sphericalangle FDC<R$) $\sphericalangle ABG>\angle CDH$. Es wäre

also $\angle EGB > \angle EHD$, während andererseits $\angle EGB < \angle EHD$ ist. Man hätte somit $\angle EGB = \angle EHD$, was unmöglich ist. Es kann also EF nicht $> AB$ sein.

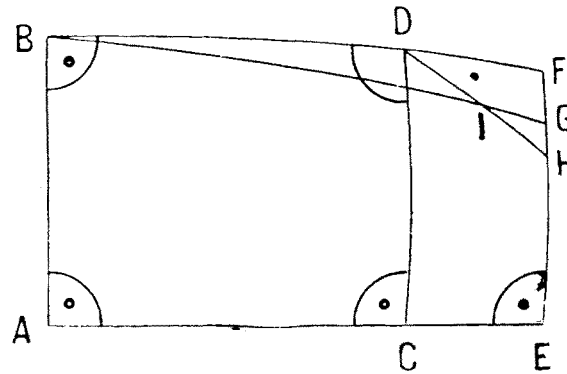


Fig. 13

Es muss somit EF (sowie jede dritte Senkrechte dieser Art) $< AB$ sein.

Zweiter Fall. Die dritte Senkrechte liegt *innerhalb* der beiden anderen (Fig. 14).

Wäre $EF = AB$ dann müsste, nach Lehrsatz 12 erster Fall, auch $CD = AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre $EF > AB$ dann müsste, nach Lehrsatz 13 erster Fall, auch $CD > AB$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Es muss somit EF (sowie jede dritte Senkrechte dieser Art) $< AB$ sein.

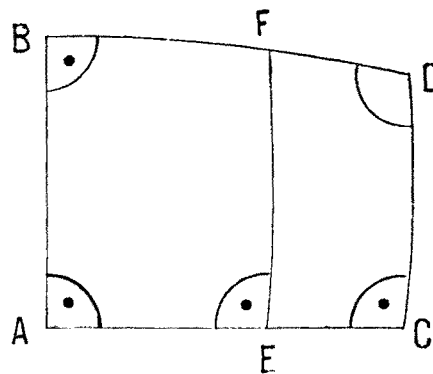


Fig. 14

Dritter Fall. Die dritte Senkrechte liegt *ausserhalb* der beiden anderen aber auf der *entgegengesetzten* Seite.

Da sich in diesem Falle stets eine, entweder zwischen der gemeinsamen und der zweiten Senkrechten oder ausserhalb dieser beiden und auf derselben Seite wie die zweite, gelegene

haupt, dessen die gemeinsame Senkrechte darstellende Seite zwischen den beiden (beiderseits in's Unendliche verlängerten) Geraden AC und BD liegt und dessen Grundseite sich (entweder innerhalb der Strecke AC oder) auf der (beiderseits in's Unendliche verlängerten) Geraden AC befindet, die die zweite Senkrechte darstellende Seite von gleicher Grösse mit der die gemeinsame Senkrechte darstellenden Seite sein.

Drittens wird dann, nach Lehrsatz 9, auch in dem dreirechtwinkligen Viereck $ACBD$, $BD=AC$ sein und somit, nach dem soeben Bewiesenen, auch in jedem zwischen den (beiderseits in's Unendliche verlängerten) Geraden AB und CD gelegenen dreirechtwinkligen Vierecke die die zweite Senkrechte darstellende Seite gleich der die gemeinsame Senkrechte darstellenden Seite sein. Weiter ist *viertens* leicht einzusehen, dass auch für die zwischen den Geraden AE und GJ (resp. zwischen AG und EJ) sowie für die zwischen AE' und $G'J'$ (resp. zwischen AG' und $E'J'$) gelegenen dreirechtwinkligen Vierecke dasselbe gelten muss, u. s. w.

Und schliesslich muss dasselbe gelten auch für die dreirechtwinkligen Vierecke deren Grundseite mit AC einen Winkel einschliesst (vgl. Viereck $AB'C'D'$, in dem $AC'=AC$ und $AB'=AB$ ist und das mit Viereck $ABCD$ kongruent ist, welche Kongruenz aus $\triangle AB'C' \cong ABC$ und $\triangle B'C'D' \cong BCD$ folgt), u. s. w.

Auf diese Weise lässt sich leicht einsehen, dass der Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit gilt.

Anmerkung. Man könnte den Lehrsatz kürzer auch folgendermassen formulieren:

Wenn das Postulat der gleichen Senkrechten in einem Falle gilt, so gilt es allgemein.

Lehrsatz 16. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein rechter ist, dann ist er es in jedem solchen Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 15 und 3.

Lehrsatz 17. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck die die zweite Senkrechte darstellende Seite grösser als die die*

gemeinsame Senkrechte darstellende Seite ist, so ist sie es in jedem solchen Viereck.

Beweis. Wenn von dem dreirechtwinkligen Viereck der Fig. 3 ausgegangen wird, dann ist, auf Grund einer der Fig. 15 analogen Figur, erstens nach Lehrsatz 13 zu schliessen, dass in jedem dreirechtwinkligen Viereck, dessen die gemeinsame Senkrechte darstellende Seite AB ist und dessen die zweite Senkrechte darstellende Seite zwischen den (beiderseits in's Unendliche verlängerten) Geraden AC und BD liegt, die die zweite Senkrechte darstellende Seite grösser als die gemeinsame Senkrechte darstellende Seite sein wird.

Zweitens ist dann weiter, wenn von dreirechtwinkligen mit Viereck $ABCD$ kongruenten Vierecken ausgegangen wird, nach Lehrsatz 13 zu schliessen, dass in jedem dreirechtwinkligen Viereck, dessen die gemeinsame Senkrechte darstellende Seite $= AB$ ist und dessen Grundseite auf der (beiderseits in's Unendliche verlängerten) Geraden AC liegt, die die zweite Senkrechte darstellende Seite grösser als die gemeinsame Senkrechte darstellende Seite sein muss.

Weiter ist dann leicht einzusehen, dass der dem dritten Teil des Beweises von Lehrsatz 15 entsprechende Teil, wenn Lehrsatz 10 berücksichtigt wird, analog zu führen ist. Und Ähnliches gilt für die dem vierten und dem letzten Teil jenes Beweises entsprechenden Teile.

Auf diese Weise lässt sich einsehen, dass der Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit gilt.

Anmerkung. Kürzer lässt sich Lehrsatz 17 auch folgendermassen fassen:

Wenn das Postulat der grösseren Senkrechten in einem Falle gilt, so gilt es allgemein.

Lehrsatz 18. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein spitzer ist, so ist er es in jedem solchen Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 17 und 4.

Lehrsatz 19. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck die die zweite Senkrechte darstellende Seite kleiner als die die*

gemeinsame Senkrechte darstellende Seite ist, so ist sie es in jedem solchen Viereck.

Beweis. Wenn von dem dreirechtwinkligen Viereck der Fig. 4 ausgegangen wird, dann ist, auf Grund einer der Fig. 15 analogen Figur und unter Berücksichtigung von Lehrsätzen 14 und 11, der Beweis ganz analog dem Beweise des vorigen Lehrsatzes zu führen.

Anmerkung. Kürzer kann der Lehrsatz folgendermassen gefasst werden:

Wenn das Postulat der kleineren Senkrechten in einem Falle gilt, so gilt es allgemein.

Lehrsatz 20. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein stumpfer ist, so ist er es in jedem solchen Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 19 und 5.

Lehrsatz 21. *Wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck der vierte Winkel ein rechter ist, dann ist in einem (dem*

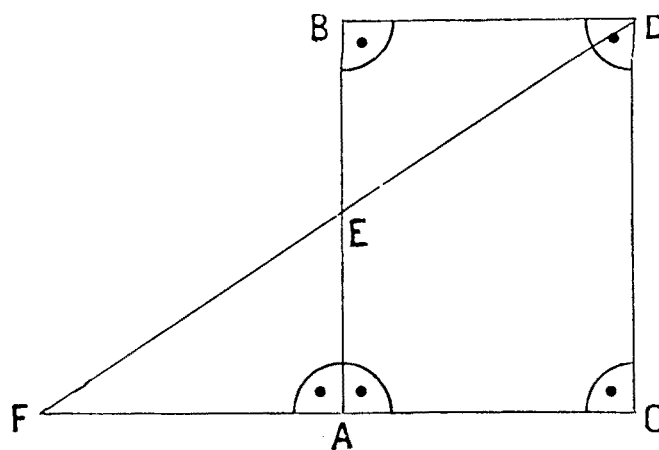


Fig. 16

ihm entsprechenden) rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $= 2R$.

Beweis. In dem dem dreirechtwinkligen Viereck $ABCD$ entsprechenden rechtwinkligen Dreieck FCD in Fig. 16 ist die

Winkelsumme deshalb $=2R$ weil $\sphericalangle CFD = FDB$ ist, welche Gleichheit aus der Kongruenz der Dreiecke AFE und BDE folgt (da, nach Konstruktion, $EA = EB$, $\sphericalangle AEF = BED$ und $\sphericalangle FAE = EBD = R$ ist).

Lehrsatz 22. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$ ist, dann ist in einem (dem ihm entsprechenden) dreirechtwinkligen Viereck die Winkelsumme $=4R$.

Beweis. Die Richtigkeit des Lehrsatzes folgt aus $\sphericalangle DFB = DEC = R$ (Fig. 17), welche Gleichheit aus der Kongruenz der Dreiecke DBF und DEC zu erschliessen ist (da, nach Konstruktion, $CD = DB$, $\sphericalangle CDE = BDF$ und, ebenfalls nach Konstruktion, $\sphericalangle DBF = DCE$).

Lehrsatz 23. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$ ist, dann ist in jedem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$.

Beweis. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$ ist, dann ist, nach dem vorigen Lehrsatz, in

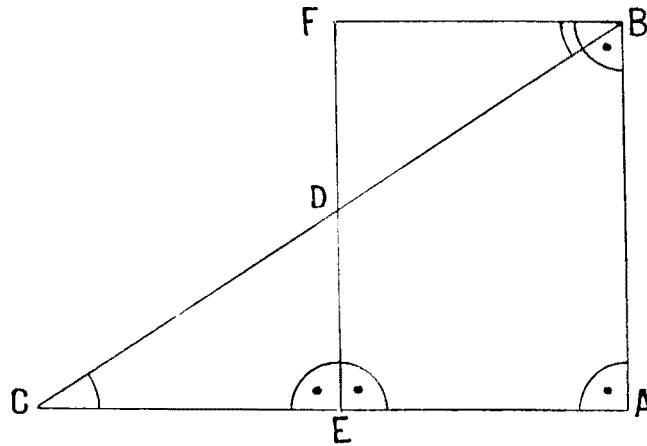


Fig. 17

einem (dem ihm entsprechenden) dreirechtwinkligen Viereck die Winkelsumme $=4R$. Nach Lehrsatz 16 muss aber, wenn in einem dreirechtwinkligen Viereck die Winkelsumme $=4R$ ist, dieselbe in jedem solchen Viereck $=4R$ sein. Da nun aber

jedem einzelnen dreirechtwinkeligen Viereck ein rechtwinkeliges Dreieck und umgekehrt entspricht, so muss, indem Lehrsatz 21 für jedes solche Paar gilt, auch in *jedem* rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$ sein.

Lehrsatz 24. *Wenn in jedem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $=2R$ ist, dann ist in jedem Dreieck die Winkelsumme ebenfalls $=2R$.*

Beweis. In bekannter Weise durch Zerlegung des nichtrechtwinkeligen in zwei rechtwinkelige Dreiecke.

Lehrsatz 25. *Wenn in jedem Dreieck die Winkelsumme $=2R$ ist, dann ist in jedem Viereck die Winkelsumme $=4R$.*

Beweis. Folgt aus Zerlegung des Vierecks in zwei Dreiecke.

Lehrsatz 26. *Wenn in einem dreirechtwinkeligen Viereck die Winkelsumme $=4R$ ist, dann ist sie es in jedem Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 21, 23, 24 und 25.

Lehrsatz 27. *Wenn in einem dreirechtwinkeligen Viereck der vierte Winkel ein spitzer ist, dann ist in einem (dem ihm entsprechenden) rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $<2R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 21 unter Zugrundelegung einer der Figur 16 analogen Figur.

Lehrsatz 28. *Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $<2R$ ist, dann ist in einem (dem ihm entsprechenden) dreirechtwinkeligen Viereck die Winkelsumme $<4R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 22 auf Grund einer der Figur 17 analogen Figur.

Lehrsatz 29. *Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $<2R$ ist, dann ist in jedem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $<2R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 23.

Lehrsatz 30. *Wenn in jedem rechtwinkeligen Dreieck die Winkelsumme $<2R$ ist, dann ist in jedem Dreieck die Winkelsumme ebenfalls $<2R$.*

Beweis. In bekannter Weise.

Lehrsatz 31. *Wenn in jedem Dreieck die Winkelsumme $< 2R$ ist, dann ist in jedem Viereck die Winkelsumme $< 4R$.*

Beweis. In bekannter Weise.

Lehrsatz 32. *Wenn in einem dreieckwinkligen Viereck die Winkelsumme $< 4R$ ist, dann ist sie es in jedem Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 27, 29, 30 und 31.

Lehrsatz 33. *Wenn in einem dreieckwinkligen Viereck der vierte Winkel ein stumpfer ist, dann ist in einem (dem ihm entsprechenden) rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $> 2R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 21 auf Grund einer der Fig. 16 analogen Figur.

Lehrsatz 34. *Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $> 2R$ ist, dann ist in einem (dem ihm entsprechenden) dreieckwinkligen Viereck die Winkelsumme $> 4R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 22 auf Grund einer der Figur 17 analogen Figur.

Lehrsatz 35. *Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $> 2R$ ist, dann ist in jedem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $> 2R$.*

Beweis. Analog dem Beweise von Lehrsatz 23.

Lehrsatz 36. *Wenn in jedem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme $> 2R$ ist, dann ist in jedem Dreieck die Winkelsumme ebenfalls $> 2R$.*

Beweis. In bekannter Weise.

Lehrsatz 37. *Wenn in jedem Dreieck die Winkelsumme $> 2R$ ist, dann ist in jedem Viereck die Winkelsumme $> 4R$.*

Beweis. In bekannter Weise.

Lehrsatz 38. *Wenn in einem dreieckwinkligen Viereck die Winkelsumme $> 4R$ ist, dann ist sie es in jedem Viereck.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 33, 35, 36 und 37.

Lehrsatz 39. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der gleichen Senkrechten gilt, so sind in den dabei entstehenden dreirechtwinkligen Vierecken alle vierten Winkel einander gleich.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 12 und 3.

Anmerkung. Könnte auch als Nebensatz von Lehrsatz 16 gelten.

Lehrsatz 40. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der grösseren Senkrechten gilt, so ist in den dabei entstehenden dreirechtwinkligen Vierecken jeder nachfolgende spitze Winkel kleiner als der vorhergehende.*

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $\sphericalangle EFD = CDB$, $\sphericalangle EFD > CDB$ und $\sphericalangle EFD < CDB$ (Fig. 18).

Wäre $\sphericalangle EFD = CDB$, dann müsste im Viereck $CEDF$ die Winkelsumme $= 4R$ sein, was nach Lehrsatz 32 unmöglich ist.

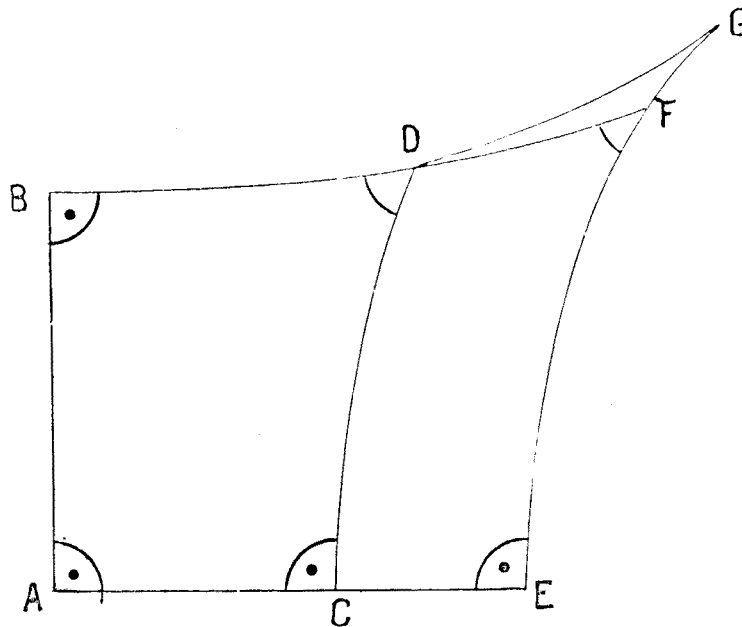


Fig. 18

Wäre $\angle EFD > \angle CDB$, dann müsste im Viereck $CEDF$ die Winkelsumme $> 4R$ sein, was nach Lehrsatz 32 ebenfalls unmöglich ist.

Es muss somit $\angle EFD < \angle CDB$ sein.

Lehrsatz 41. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der kleineren Senkrechten gilt, so ist in den so entstehenden dreieckigen Vierecken jeder nachfolgende stumpfe Winkel grösser als der vorhergehende.

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $\angle EFD = \angle CDB$, $\angle EFD < \angle CDB$ und $\angle EFD > \angle CDB$ (Fig. 19).

Wäre $\angle EFD = \angle CDB$, dann müsste im Viereck $CEDF$ die Winkelsumme $= 4R$ sein, was nach Lehrsatz 38 unmöglich ist.

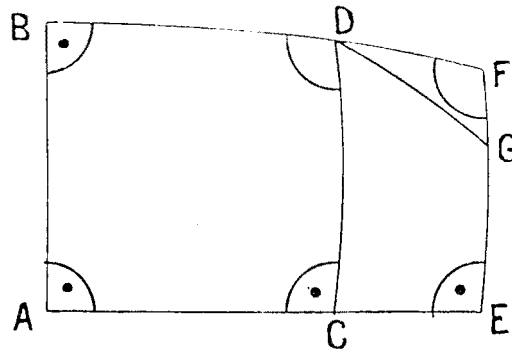


Fig. 19

Wäre $\angle EFD < \angle CDB$, dann müsste im Viereck $CEDF$ die Winkelsumme $< 4R$ sein, was nach Lehrsatz 38 ebenfalls unmöglich ist.

Es muss somit $\angle EFD > \angle CDB$ sein.

Lehrsatz 42. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der gleichen Senkrechten gilt, dann sind die beiden Geraden überall gleich weit voneinander entfernt (sind *aequidistant*).

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lehrsatz 12.

Lehrsatz 43. Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der grösseren Senkrechten

gilt, dann ist jede ferner gelegene Senkrechte grösser als eine nähere und die beiden Geraden divergieren voneinander auf beiden Seiten von der gemeinsamen Senkrechten.

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $EF=CD$, $EF<CD$ und $EF>CD$ (Fig. 18).

Wäre $EF=CD$, dann müsste (in dem Viereck $CEDF$) $\sphericalangle EFD = \sphericalangle CDF$ sein, was unmöglich ist, da dann (nach Lehrsatz 4) $\sphericalangle CDB < R$ und somit) $\sphericalangle CDF > R$ und (nach Lehrsatz 18) $\sphericalangle EFD < R$ wäre. Es kann also EF nicht $= CD$ sein.

Wird $EF < CD$ vorausgesetzt, dann mache man $EG = CD$. Dann wäre (im Viereck $CDEG$) $\sphericalangle EGD = \sphericalangle CDG$. Es müsste aber einerseits $\sphericalangle CDG > R$ und andererseits (nach Eukl. I, 16) $\sphericalangle EGD < R$ sein. Es wäre somit $\sphericalangle EGD \gtrless R$, was unmöglich ist. Es kann somit EF auch nicht $< CD$ sein.

Es muss somit $EF > CD$ sein.

Lehrsatz 44. *Wenn zwei Gerade eine gemeinsame Senkrechte besitzen und wenn das Postulat der kleineren Senkrechten gilt, dann ist jede ferner gelegene Senkrechte kleiner als eine nähere und die beiden Geraden konvergieren miteinander auf beiden Seiten von der gemeinsamen Senkrechten.*

Beweis. Es sind drei Fälle möglich: $EF=CD$, $EF>CD$ und $EF<CD$ (Fig. 19).

Wäre $EF = CD$, dann müsste (in dem Viereck $CEDF$) $\sphericalangle EFD = \sphericalangle CDF$ sein, was unmöglich ist, da dann (nach Lehrsatz 5) $\sphericalangle CDB > R$ und somit) $\sphericalangle CDF < R$ und (nach Lehrsatz 20) $\sphericalangle EFD > R$ wäre. Es kann somit EF nicht $= CD$ sein.

Wird $EF > CD$ vorausgesetzt, dann mache man $EG = CD$. Es wäre dann (im Viereck $CDEG$) $\sphericalangle EGD = \sphericalangle CDG$. Es müsste aber einerseits $\sphericalangle CDG < R$ und andererseits (nach Eukl. I, 16) $\sphericalangle EGD > R$ sein. Es wäre somit $\sphericalangle EGD \lesseqgtr R$, was unmöglich ist. Es kann somit EF auch nicht $> CD$ sein.

Es muss somit $EF < CD$ sein.

Anmerkung. Lehrsatz 44 stellt nur die Konvergenz der beiden eine gemeinsame Senkrechte besitzenden Geraden, im Falle dass das Postulat der kleineren Senkrechten gilt, fest. Dass die beiden Geraden sich miteinander (in einem oder in

zwei Schnittpunkten) schneiden, muss besonders bewiesen werden, was bekanntlich nur durch Anwendung des Archimedischen Postulats geschehen kann. Da wir von letzterem in dieser Abhandlung prinzipiell keinen Gebrauch machen, so sind die Geraden hier auch im Falle des Postulats der kleineren Senkrechten als unendlich lang (als offen) und die vom Ausenwinkelsatz (Eukl., I, 16) abhängigen Sätze (in der betreffenden Ebene) als uneingeschränkt geltend zu betrachten.
