Integrale in der Kinematik

Von

WILHELM BLASCHKE

1838 hat J. Steiner eine Arbeit in Crelles Journal 21 veröffentlicht unter dem Titel „Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven". Manche der darin enthaltenen Gedanken scheinen mir einiger Verallgemeinerungen und Übertragungen fähig. Ich möchte das im Folgenden an einem einfachen Beispiel auseinandersetzen.

Es seien ξ_i rechtwinklige Koordinaten in bezug auf ein Achsenkreuz Ξ im R_3, das wir uns beweglich, denken abhängig von 3 reellen Parametern u_1, u_2, u_3. Dann lassen sich raumfeste Koordinaten x_i aus den ξ_i gewinnen

$$x_i = a_{io} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\xi_k\,; \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{1}$$

Darin bilden die a_{ik} eine eigentlich orthogonale Matrix, und alle a hängen von u_1, u_2, u_3 ab. Für die Fortschreitung eines mit Ξ starr verbundenen Punktes x finden wir durch Ableitung aus (1)

$$dx_i = da_{io} + \sum \xi_k\, da_{ik} \tag{2}$$

oder, wenn wir diesen Vektor nach den Achsen von Ξ aufspalten

$$dx_i = \sum_j \{\omega_j + \sum \omega_{jk}\,\xi_k\}\, a_{ij}\,. \tag{3}$$

Darin bedeuten die ω die folgenden *Pfaff*schen Formen in den

$$\omega_j = \sum_i a_{ij}\, da_{io} \tag{4}$$

und

$$\omega_{jk} = \sum_i a_{ij}\, da_{ik} \tag{5}$$

Wegen der Orthogonalität der Matrix (a_{ik}) ist

$$\sum_i a_{ij}\, a_{ik} = \delta_{jk} \tag{6}$$

und daraus durch Ableitung

$$\omega_{jk} + \omega_{kj} = 0\ . \tag{7}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum a_{ij}\, dx_i = \delta\xi_i\ , \tag{8}$$

ferner

$$\omega_{23} = \tau_1\ ,\ \omega_{31} = \tau_2\ ,\ \omega_{12} = \tau_3\ , \tag{9}$$

so ergeben die Formeln (3) ausführlich die bekannten Darstellungen einer „unendlich kleinen Bewegung"

$$\begin{aligned} \delta\xi_1 &= \omega_1 + \tau_3\,\xi_2 - \tau_2\,\xi_3\ , \\ \delta\xi_2 &= \omega_2 + \tau_1\,\xi_3 - \tau_3\,\xi_1\ , \\ \delta\xi_3 &= \omega_3 + \tau_2\,\xi_1 - \tau_1\,\xi_2\ , \end{aligned} \tag{10}$$

durch die sechs *Pfaff*schen Formen $\omega_i\,,\tau_i$.

Verwenden wir *alternierende Produkte* von Differentialen, so finden wir für das vom Punkt x beschriebene Raumelement

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 dx_3 &= \delta\xi_1\delta\xi_2\delta\xi_3 = \\ &= \omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1(\omega_2\tau_2+\omega_3\tau_3)\xi_1 + \omega_1\tau_2\tau_3\xi_1^2 + (\omega_2\tau_2+\omega_3\tau_3)\tau_1\xi_2\xi_3 + \\ &\quad + \omega_2(\omega_3\tau_3+\omega_1\tau_1)\xi_2 + \omega_2\tau_3\tau_1\xi_2^2 + (\omega_3\tau_3+\omega_1\tau_1)\tau_2\xi_3\xi_1 + \\ &\quad + \omega_3(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)\xi_3 + \omega_3\tau_1\tau_2\xi_3^2 + (\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)\tau_3\xi_1\xi_2\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Der vom Punkt x beschriebene Rauminhalt

$$V = \iiint \delta\xi_1\, \delta\xi_2\, \delta\xi_3 = V(\xi_1\,,\xi_2\,,\xi_3) \tag{12}$$

ist somit ein quadratisches Polynom in den ξ_i. $dV=0$ gesetzt, stellt eine Quadrik $F(u_1, u_2, u_3)$ dar, deren Ort man im festen Raum der x_i oder auch im bewegten Raum der ξ_i untersuchen kann. Diese beiden in der Regel dreigliedrigen Scharen von Quadriken sind in bemerkenswerter Weise aufeinander bezogen, ähnlich wie zwei aufeinander verbiegbare Flächen. Beachtlich sind auch solche Bewegungsvorgänge mit 3 Freiheitsgraden, bei denen sich die Ordnung des Polynoms V erniedrigt.