

## Sur les équations différentielles algébriques du premier ordre engendrant des fonctions entières

Par

MICHEL PETROVITCH

1. Une équation différentielle du premier ordre peut avoir des fonctions *entières* comme intégrales, soit *générale*, soit *particulière*. Ainsi, l'équation

$$y' - 2xy = 0$$

a comme intégrale générale la fonction entière

$$y = C e^{x^2}$$

et l'équation

$$(1+x^2)y' - xy - a = 0$$

ayant comme intégrale générale la fonction multiforme

$$y = ax + C\sqrt{1+x^2}$$

a comme intégrale particulière la fonction entière

$$y = ax.$$

Ecrivons l'équation sous la forme

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0$$

où  $f$  est polynome irréductible en  $y$  et  $y'$ , à coefficients fonctions algébriques de  $x$ .

Dans le cas où l'équation admet comme intégrales (générale ou particulières) des *fonctions entières transcendantes* de  $x$ ,

le polynome  $f$  en  $y$  et  $y'$  est affecté de certaines particularités, dont nous indiquerons les suivantes.

I. *Les fonctions algébriques figurant comme coefficients des puissances de  $y$  et de  $y'$  dans  $f$  se réduisent à des polynomes en  $x$ .*

En effet,  $f$  étant algébrique en  $x$ , on peut toujours écrire l'équation sous la forme

$$(2) \quad F(x, X, y, y') = 0$$

où  $F$  est polynome irréductible en  $x, X, y, y'$ , les variables  $x$  et  $X$  étant liés par une relation algébrique

$$(3) \quad G(x, X) = 0,$$

où  $G$  est polynome irréductible en ces deux variables.

En mettant en évidence les puissances de  $X$ , l'équation (2) s'écrit

$$(4) \quad F_0(x, y, y') + F_1(x, y, y')X + \dots + F_{m-1}(x, y, y')X^{m-1} = 0$$

$m$  étant le degré de  $G$  en  $X$ . Et alors :

*Toute intégrale fonction entière de (2) est commune à  $m$  équations différentielles*

$$(5) \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \dots \quad F_{m-1} = 0.$$

Car, si dans (4) on remplace  $y$  par une intégrale fonction entière de  $x$ , le premier membre de cette équation devient un polynome en fonction algébrique irrationnelle  $X$ , à coefficients  $F_k$  qui sont des fonctions entières de  $x$ . Si ces coefficients ne sont pas identiquement nuls, les deux polynomes (3) et (4) en  $X$  doivent avoir un facteur commun, nécessairement polynome en  $x$  et  $X$ , puisqu'il divise  $G$ . L'équation (3) ne serait pas irréductible, et par conséquent on doit avoir identiquement

$$(6) \quad F_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Comme les  $F_k$  n'admettent pas des facteurs communs [sans quoi l'équation (2) serait réductible], les équations (5) ou bien sont incompatibles (dans quel cas il n'y a pas d'intégrales entières) ou bien définissent une relation algébrique entre  $x$  et  $y$ , de sorte que la fonction  $y$  ne saurait être transcendante, comme il fallait montrer.

Supposons alors les conditions de la proposition I remplies ;  $f$  sera polynome irréductible en  $x, y, y'$ . Au point de vue qui nous occupe, de telles équations ont été l'objet de nombreuses recherches (Painlevé, Malmquist, Petrovitch etc.) et les principaux résultats en sont exprimés par les propositions suivantes.

Toutes les fois que l'équation admet comme intégrales (générale ou particulières) des fonctions entières transcendantes

II. *L'équation n'est jamais à points critiques mobiles.*

Ceci résulte du théorème démontré par Malmquist<sup>1)</sup> :

Si l'équation n'est pas à points critiques fixes, toute intégrale à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points critiques mobiles est nécessairement une fonction algébrique.

III. *L'équation étant à points critiques fixes, est du genre zero en  $y$  et  $y'$ .*

En effet, si son genre est supérieur à l'unité, d'après le théorème de Poincaré sur les équations du premier ordre à points critiques fixes, l'intégrale générale est une fonction algébrique de  $x$  ; toute intégrale uniforme est rationnelle, et par suite toute intégrale fonction entière est polynome en  $x$ .

Si le genre est égal à l'unité, d'après le même théorème l'intégrale générale  $y$  est rationnelle en

$$\lambda [I(x) + C]$$

$\lambda$  étant le symbole d'une fonction méromorphe doublement périodique,  $I$  étant une intégrale abélienne, et les coefficients des puissances de  $\lambda$  étant fonctions algébriques de  $x$ . L'intégrale (générale ou particulières) ne saurait être une fonction entière transcendante.

Il s'en suit que le seul cas pouvant engendrer des intégrales fonctions entières transcendantes est celui où le genre de l'équation différentielle est égal à zéro. Dans ce cas l'équation se ramène par un changement de la variable  $y$  à une équation de Riccati, ou bien à ses dégénéralions, équation de Bernoulli ou linéaire.

---

<sup>1)</sup> I. Malmquist: *Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre* (Acta mathem. 1920 t. 42. p. 319).

J'ai indiqué dans des travaux antérieurs le parti qu'on peut tirer, dans le problème ici considéré, du théorème de M. Picard sur les valeurs que prend une fonction entière pour les valeurs finies de la variable indépendante. En particulier, j'ai montré que, pour des types généraux d'équations différentielles algébriques du premier ordre, on peut reconnaître directement, sur l'équation elle-même, que l'intégrale ne prend certaines valeurs particulières pour aucune valeur finie de  $x$ . Dans ces conditions, si elle est uniforme, elle est nécessairement rationnelle, et lorsqu'elle est fonction entière, elle se réduit à un polynôme en  $x$ <sup>1)</sup>.

2. Pour certains types d'équations, sans connaître la fonction entière figurant dans l'expression de l'intégrale générale ou particulière, on connaît la manière dont elle  $y$  figure, ainsi que certaines particularités dont cette fonction entière est affectée.

Tel est, par exemple, le cas de l'équation de Riccati

$$(7) \quad y' + y^2 + \varphi(x) = 0$$

qui est l'élément de réduction dans des nombreux problèmes se rattachant aux équations différentielles plus générales.

Les propositions qui suivent se rattachent au cas où la fonction  $\varphi(x)$ , figurant comme coefficient de l'équation (7), est réelle, finie, différente de zéro et positive pour les valeurs de  $x$  surpassant un nombre positif fixe (et en particulier, lorsque la fonction  $\varphi$  est finie, différente de zéro et positive pour toute valeur réelle de  $x$ ). Dans ce cas

*Toutes les fois que l'intégrale (générale ou particulière) de (7) est la dérivée logarithmique d'une fonction entière, le genre de celle-ci est supérieur à zéro.*

En effet, si l'on pose

$$y = \frac{z'}{z}$$

la fonction  $z$  satisfait à l'équation linéaire

$$(8) \quad z'' + \varphi(x) z = 0.$$

---

<sup>1)</sup> M. Petrovitch: Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques (Thèse de doctorat, Paris).

Supposons qu'à partir d'une valeur positive de  $x$  on ait constamment

$$\varphi(x) > N$$

$N$  étant un nombre positif fixe, fini et différent de zéro. La proposition connue sur les zéros des intégrales de l'équation différentielle binôme du second ordre conduit au résultat suivant :

Deux zéros consécutifs  $\beta_k$  et  $\beta_{k+1}$  de la fonction

$$u = \sin x \sqrt{N}$$

comprennent *au moins* un zéro  $\alpha_i$  de la fonction  $z$  ; si un zéro  $\alpha_i$  coïncide avec un zéro  $\beta_k$ , la variable  $x$ , croissant à partir de  $\alpha_i$ , atteindra un autre zéro  $\alpha_{i+1}$  de  $z$  avant d'atteindre le zéro suivant  $\beta_k$  de  $u$ . La série ayant pour termes les inverses des modules des zéros réels de  $z$  sera donc *divergente*, et elle le sera à plus forte raison lorsqu'elle sera complétée par les termes provenant des zéros imaginaires éventuels de  $z$ , ce qui montre que le genre de  $z$  n'est jamais égal à zéro.

En remarquant que dans le cas de

$$\varphi(x) = 1$$

la fonction  $z$  est

$$z = \sin x$$

on voit que le genre de  $z$  peut bien être égal à un. Cette dernière fonction n'a pas des zéros imaginaires, et l'on démontre, à cet égard, le résultat général suivant :

*Toutes les fois que l'intégrale (générale ou particulière) de (7) est la dérivée logarithmique d'une fonction entière n'ayant pas des zéros imaginaires, ou n'en ayant qu'un nombre limité, le produit canonique de facteurs primaires de cette fonction entière est du genre un.*

En effet, supposons qu'à partir d'une valeur positive de  $x$  on ait constamment

$$\varphi(x) < M$$

$M$  étant un nombre positif fixe, fini et différent de zéro. D'après la proposition connue, deux zéros consécutifs  $\beta_k$  et  $\beta_{k+1}$  de la fonction

$$v = \sin x \sqrt{M}$$

comprennent *au plus* un zéro  $\alpha_i$  de la fonction  $z$ ; si un zéro  $\alpha_i$  coïncide avec un zéro  $\beta_k$ , la variable  $x$ , croissant à partir de  $\alpha_i$ , ne peut atteindre un autre zéro  $\alpha_{i+1}$  de  $z$  sans atteindre d'abord un zéro de  $v$ . La série ayant pour termes les inverses des carrés des modules des zéros réels de  $z$  sera donc *convergente*, et elle le sera encore lorsqu'elle sera complétée par les termes provenant des zéros imaginaires éventuels (en nombre limité) de  $z$ . Le genre de la fonction  $z$  est donc égal à un.

Il s'en suit également la proposition suivante :

*Toutes les fois que l'intégrale (générale ou particulière) de (7) est la dérivée logarithmique d'une fonction entière dont le produit des facteurs primaires est du genre supérieur à un, cette fonction entière a une infinité des zéros réels et aussi une infinité des zéros imaginaires.*

Il arrive que l'intégrale considérée de l'équation (7) n'est pas la dérivée logarithmique d'une fonction entière, mais une combinaison déterminée d'une telle dérivée. Tel est, par exemple le cas de l'équation

$$y' + y^2 + \frac{1-4x}{4x^2} = 0$$

ayant comme intégrale particulière la fonction

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{z'}{z}$$

$z$  étant la transcendante de Bessel

$$(9) \quad z = \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots$$

Il en est de même de l'équation

$$y' + y^2 - \frac{4x^2 + 1}{4x^2} = 0$$

satisfaite par la fonction (9) où  $z$  est la transcendante de Bessel

$$(10) \quad 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Lorsque  $y$  est la combinaison linéaire de la dérivée logarithmique d'une fonction entière, la transformation connue, ramenant une équation différentielle trinôme du second ordre à une équation binôme, ramène alors des tels cas au cas précédent.

3. Dans ce qui suit nous considérerons les équations différentielles algébriques du premier ordre engendrant des fonctions entières à *coefficients tayloriens positifs*.

Dans ce cas la fonction entière

$$(11) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

remplissant cette condition, et l'équation différentielle à coefficients réels

$$(12) \quad f(x, y, y') = 0$$

à laquelle satisfait  $y$ , outre les conditions générales énumérées dans ce qui précède remplissent encore les conditions indiquées dans ce qui suit.

D'abord, l'équation (12), d'après ce qui précède, peut s'écrire sous une forme telle que  $f$  soit polynôme irréductible en  $x, y, y'$ . Et alors :

I. *L'intégrale réelle  $y$  n'est jamais une fonction entière du genre infini; son genre est au plus égal au degré de  $f$  en  $x$  augmenté d'une unité.*

C'est la conséquence d'un théorème connu sur la vitesse de croissance des équations différentielles algébriques du premier ordre lorsque la variable indépendante  $x$  augmente par valeurs réelles positives. Notamment, soit  $y$  une intégrale réelle de (12), continue pour les grandes valeurs positives de  $x$ . M. Lindelöf<sup>1)</sup> a montré qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de  $x$  on aura constamment en valeurs absolues

$$(13) \quad y(x) \leq e^{Cx^{m+1}}$$

<sup>1)</sup> E. Lindelöf: *Sur la croissance des intégrales des équations différentielles du premier ordre*. (Bull. des sc. mathémat. t. I. 1899).

où  $m$  est le degré du polynome  $f$  en  $x$ ,  $C$  étant une constante déterminée rattachée à ce polynome. On aura donc pour les grandes valeurs de  $r$

$$(14) \quad |y(x)| \leq e^{Cr^{m+1}} \quad r = |x|$$

d'où l'on conclut, de la manière bien connue, que le genre de la fonction  $y$  ne surpasse pas le nombre  $m+1$ .

La proposition n'embrasse que les intégrales fonctions entières des équations différentielles du premier ordre. Ainsi, par exemple, la fonction entière du genre infini

$$y = e^{e^x} P(x)$$

où  $P$  est polynome à coefficients positifs, satisfait à une équation différentielle algébrique du second ordre.

D'autre part, les équations (12) peuvent avoir comme intégrales des fonctions entières d'un genre fini quelconque. On le voit sur l'exemple de l'équation

$$y'^2 + (1-y^2)p^2 x^{2(p-1)} = 0$$

( $p$ =entier positif) ayant pour intégrale particulière la fonction entière du genre  $p$

$$y = \frac{1}{2}(e^{x^p} + e^{-x^p}) = \cos(ix^p) = 1 + \frac{x^{2p}}{2!} + \frac{x^{4p}}{4!} + \frac{x^{6p}}{6!} + \dots$$

Remarquons aussi que la limite supérieure pour le genre de  $y$  peut être effectivement atteinte. Il en est ainsi, par exemple, pour la fonction entière du genre  $m+1$

$$y = e^{x^{m+1}}$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$y' - (m+1)x^m y = 0.$$

Dans le cas où  $x$  ne figure par explicitement dans l'équation différentielle, on a  $m=0$  et le genre de  $y$  est égal à zéro ou à un. Ceci est conforme au théorème connu sur les équations

$$f(y, y') = 0$$



L'intégrale  $y$  est polynome en  $e^{ax}$  où  $a$  est une constante.

M. Lindelöf a indiqué la manière pour déterminer la constante  $C$  pour l'équation (12) donnée. Posons dans cette équation

$$(15) \quad y = e^{Cx^{m+1}}$$

$$(16) \quad y' = C(m+1)x^m e^{Cx^{m+1}}$$

et groupons  $y$  les termes qui, après ce changement, contiennent la plus haute puissance de la fonction exponentielle (15). Groupons ensuite dans cet ensemble de termes, ceux qui contiennent la plus haute puissance de  $x$ , et écrivons l'ensemble de ces termes égal à zéro. On obtiendra une équation algébrique en  $C$  et l'on prendra pour la valeur  $C$  une valeur positive quelconque plus grande que la plus grande racine de cette équation.

A la proposition I on peut donner aussi la forme suivante :

II. *Le degré en  $x$  du polynome  $f$ , lorsque l'équation (12) a une intégrale  $y$  fonction entière du genre  $p$ , est au moins égal à  $p-1$ .*

L'inégalité (14) conduit à la proposition suivante relative-ment au coefficient  $a_n$  de l'intégrale  $y$  :

III. *Le coefficient  $a_n$  ne surpasse jamais la valeur*

$$(17) \quad \frac{AB^n}{n^{\alpha n}}$$

où  $\alpha$ ,  $A$ ,  $B$  sont des constantes convenablement choisies ne dépendant pas de  $n$ , et en particulier

$$(18) \quad \alpha = \frac{1}{m+1}$$

En effet, d'après l'inégalité (14), valable pour  $r$  suffisamment grand, on aura

$$(19) \quad a_n \leq A \frac{e^{Cr^{m+1}}}{r^n}$$

quelque soit la valeur positive de  $r$ . En faisant varier  $r$ , le second membre de (19) atteindra son minimum pour

$$r = \left[ \frac{n}{(m+1)C} \right]^{\frac{1}{m+1}}$$

ce minimum étant

$$(20) \quad A \frac{B^n}{n^{an}}$$

où  $B$  désigne la constante

$$(21) \quad B = [(m+1) Ce]^a$$

ce qui démontre la proposition.

On en conclut aussi que

IV. *Le module de l'intégrale  $y$  le long du cercle  $|x| = r$  ne surpasse jamais la valeur*

$$A \theta(Bx)$$

où  $\theta(x)$  désigne la transcendante entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{an}}.$$

De la proposition III on déduit aussi la suivante se rattachant aux zéros de  $y$  :

V. *Les zéros de l'intégrale  $y$  ne croissent jamais moins vite avec leur rang que la valeur  $n^a$ .*

Car, d'après la proposition III la valeur  $\sqrt[n]{a_n}$  ne décroît pas moins vite que la valeur  $n^{-a}$ , ce qui montre que la valeur  $a_n^{-\frac{1}{n}}$  ne croît pas moins vite que  $n^a$ . Il s'en suit, d'après le théorème de M. Hadamard, que le module du zéro  $\xi_n$  n'augmente pas moins vite que la valeur  $n^a$ .

Comme on le voit, les zéros  $\xi_n$  ne sont pas plus denses que les nombres  $n^a$  pour  $n=1, 2, 3 \dots$ . Or, ceux-ci ne sont pas plus denses que les termes de la suite naturelle des nombres entiers positifs, ce qui conduit à la proposition suivante :

VI. *Une équation différentielle (12) n'a jamais d'intégrales  $y$  fonctions entières à coefficients tayloriens positifs, dont les zéros seraient plus denses que les termes de la suite naturelle des nombres entiers positifs.*

Considérons maintenant les équations différentielles (12) engendrant des fonctions entières à coefficients tayloriens positifs et commensurables. Outre les propositions I—VI qui s'appliquent à ce cas sans modifications, l'intégrale  $y$  jouit d'une propriété qui n'est valable que dans ce cas particulier.

Comme l'on sait, les équations différentielles algébriques ne permettent pas des très grandes vitesses de décroissance du coefficient  $a_n$ . Cette vitesse est limitée par le théorème de M. Pólya<sup>1</sup>):

Si une fonction entière

$$(22) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

à coefficients nombres commensurables satisfait à une équation différentielle

$$F(x, y, y', y'' \dots) = 0$$

d'un ordre fini le rapport

$$\frac{\log |a_n|}{n(\log n)^2}$$

reste fini lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Comme le coefficient  $a_n$ , dans le cas ici considéré, est réel, positif et tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , ceci revient à ce que le rapport

$$-\frac{\log a_n}{n(\log n)^2} = \frac{\log \frac{1}{a_n}}{n(\log n)^2}$$

ne surpasse pas un nombre positif  $\beta$ , fini et fixe. On en conclut que  $a_n$  décroît moins vite que le nombre

$$e^{-\beta n (\log n)^2}$$

c'est-à-dire que pour toute valeur de  $n$  on a

$$a_n > K e^{-\beta n (\log n)^2}$$

$K$  étant un nombre fixe, fini et positif. Ceci montre que pour les valeurs positives de  $x$  on a constamment

$$y > a_0 + K \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n (\log n)^2} x^n$$

ce qui conduit à la proposition :

---

<sup>1</sup>) G. Pólya: Ueber das Anwachsen von ganzen Funktionen die einer Differentialgleichung genügen (Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, Jahrg. 61. 1916. p. 531—545).

VII. *La courbe intégrale  $y$  est une courbe croissante dans le quadrant à coordonnées positives du plan  $xOy$ , et s'y trouve constamment comprise entre les deux courbes*

$$(23) \quad y = a_0 + K f_1(x)$$

$$(24) \quad y = a_0 + A f_2(Bx)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les transcendentes

$$(25) \quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n (1 + \log n)^2} x^n$$

$$(26) \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n \log n} x^n$$

$\alpha, \beta, A, B, K$  étant des constantes indépendantes de  $n$ , indiquées dans ce qui précède.

La borne inférieure (23) est valable pour le cas d'une équation d'un ordre quelconque, tandis que la borne supérieure (24) n'est valable que pour les équations du premier ordre.

Nous terminerons en remarquant que toutes les propositions démontrées dans ce paragraphe restent valables sans modifications pour toutes les fonctions  $y$  dont les modules des coefficients tayloriens (réels ou imaginaires, positifs ou négatifs) ne surpassent pas ceux d'une fonction  $z$  satisfaisant à une équation différentielle algébrique du premier ordre.

En effet, toutes ces propositions sont fondées sur l'inégalité (13) de M. Lindelöf, qui est aussi valable pour le module de  $y$ , car celui-ci ne dépasse pas le module de  $z$ .

A ce propos il convient encore de rappeler que l'existence d'une équation différentielle algébrique

$$(27) \quad f(x, y, y') = 0$$

à laquelle satisfait la fonction  $z$ , n'entraîne pas celle d'une telle équation qui aurait pour intégrale la fonction  $y$  elle-même. Ainsi, d'après le théorème de Fatou—Pólya, la fonction  $z$  n'ayant pas de coupures puisqu'elle satisfait à une équation (27), peut en avoir après un changement convenable des signes de ces coefficients tayloriens; ainsi changée elle ne satisfera à aucune équation (27).

---