

ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ АР-ПОЛЕЙ

Й. Малишич

Резюме. Рассматривается авторегрессивное поле $\eta(u, v)$ типа (p, q) с параметрами θ_1 и θ_2

$$\sum_{j=0}^p \sum_{k=1}^q a_{jk} \eta(u - j\theta_1, v - k\theta_2) = \xi(u, v)$$

где $\xi(u, v)$ непрерывно в среднем квадратичном однородное случайное поле с рациональной спектральной плотностью. Изучается, по методу А. М. Яглома, вид спектральной характеристики наилучшей несмещенной оценки среднего значения поля η по известным значениям этого поля на прямоугольнике.

Пусть случайные поля $\{\xi(u, v), (u, v) \in R^2\}$, $\{\eta(u, v), (u, v) \in R^2\}$, такие что

$$(1) \quad \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk} \eta(u - j\theta_1, v - k\theta_2) = \xi(u, v),$$

$a_{jk} \in R$, $a_{00} = 1$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $p \in N$, $q \in N$. Тогда случайное поле η будет авторегрессионным полем типа (p, q) с параметрами θ_1 и θ_2 . Это мы будем обозначать: $\eta \sim AP(\xi; p, q, \theta_1, \theta_2)$.

Будем считать, что поле $\xi(u, v)$ однородное, непрерывно в среднем квадратичном, с спектральным представлением

$$(2) \quad \xi(u, v) = \iint_{R^2} \exp\{i(\lambda u + \mu v)\} Z_{\xi}(d\lambda, d\mu)$$

и спектральной плотностью

$$(2') \quad g_{\xi}(\lambda, \mu) = |P_2(\lambda, \mu)|^2 / |P_1(\lambda, \mu)|^2.$$

Многочлены $P_1(\lambda, \mu)$ и $P_2(\lambda, \mu)$ в (2') такие что при любом действительном $\lambda = \lambda_0$ (или $\mu = \mu_0$ соответственно) все их нули лежат в верхней μ -полуплоскости (в верхней λ -полуплоскости соответственно). Кроме того, мы будем предполагать что все корни характеристических уравнений по модулю меньше 1. Тогда можно найти [5] коэффициенты b_{jk} такие, что

$$(3) \quad \eta(u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} \xi(u - j\theta_1, v - k\theta_2).$$

Нетрудно видеть, что тогда и поле $\eta(u, v)$ будет однородным, что допускает спектральное разложение

$$(3') \quad \eta(u, v) = \iint_{k^2} \exp\{i(\lambda u + \mu v)\} Z_{\eta}(d\lambda, d\mu),$$

где

$$Z_{\eta}(d\lambda, d\mu) = \left[\sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk} \exp\{-i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} \right]^{-1} Z_{\xi}(d\lambda, d\mu)$$

и что

$$(3') \quad g_{\eta}(\lambda, \mu) = g_{\xi}(\lambda, \mu) \cdot \left| \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q a_{jk} \exp\{-i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} \right|^{-2}$$

его спектральная плотность.

Если нашей задачей будет отыскание наилучшей несмещенной оценки среднего значения m_{ξ} поля ξ по известным значениям на прямоугольнике $S = \{(u, v) : -x \leq u \leq 0, -t \leq v \leq 0\}$, оценку а смысле метода А. М. Яглома будем искать в виде

$$(4) \quad \eta_{\xi} = \iint_{R^2} \Phi_{\xi}(\lambda, \mu) Z_{\xi}(d\lambda, d\mu),$$

где спектральная характеристика $\Phi_{\xi}(\lambda, \mu)$ -функция в пространстве $L^2(S)$, натянутом на функции $\exp\{i(\lambda u + \mu v)\}$, $(u, v) \in S$, так что

$$(4') \quad \iint_{R^2} |\Phi_{\xi}(\lambda, \mu)|^2 g_{\xi}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu < +\infty.$$

Тогда [2] имеет место следующее условие (Я):

– функция $\Phi_{\xi}(\lambda, \mu)$ такая что при любом действительном значении λ она будет целой функцией комплексной переменной μ , а при любом действительном значении μ она будет целой функцией переменной λ ;

– функция $\Phi_{\xi}(\lambda, \mu)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi}(\lambda, \mu) = & \Phi_1^{(\xi)}(\lambda, \mu) + \Phi_2^{(\xi)}(\lambda, \mu) \exp\{-i\lambda x\} + \\ & + \Phi_3^{(\xi)}(\lambda, \mu) \exp\{-i\mu t\} + \Phi_4^{(\xi)}(\lambda, \mu) \exp\{-i(\lambda x + \mu t)\}, \end{aligned}$$

где $\Phi_j^{(\xi)}$ -рациональные функции, такие что условие (4') удовлетворяется и $\Phi_\xi(0, 0) = 1$;

– функция

$$(5) \quad \psi_\xi(\lambda, \mu) = \Phi_\xi(\lambda, \mu)g_\xi(\lambda, \mu) - \delta(1 - e^{-i\lambda x})(1 - e^{-i\mu t})/\lambda\mu$$

имеет вид

$$(5') \quad \begin{aligned} \psi_\xi(\lambda, \mu) = & \psi_1(\lambda, \mu) + \psi_2(\lambda, \mu) \exp\{-i\lambda x\} + \\ & + \psi_3(\lambda, \mu) \exp\{-i\mu t\} + \psi_4(\lambda, \mu) \exp\{-i(\lambda x + \mu t)\}, \end{aligned}$$

где ψ_j следующие функции

$$(5'') \quad \psi_j(\lambda, \mu) = \Phi_j^{(\xi)}(\lambda, \mu) \cdot g_\xi(\lambda, \mu) - \delta_j/\lambda\mu$$

и $\delta_1 = \delta_4 = \delta$, $\delta_2 = \delta_3 = -\delta$;

– при фиксированном значении одной переменной функция $\psi_1(\lambda, \mu)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости другой переменной;

– при $\lambda = \lambda_0$ функция $\psi_2(\lambda, \mu)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости μ , а при $\mu = \mu_0$ аналитической функцией в нижней полуплоскости λ

– при $\mu = \mu_0$ функция $\psi_3(\lambda, \mu)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости λ , а при $\lambda = \lambda_0$ аналитической функцией в нижней полуплоскости μ

– при фиксированном значении λ функция $\psi_4(\lambda, \mu)$ будет аналитической функцией в нижней полуплоскости μ , а при фиксированном значении μ она будет аналитической функцией в нижней полуплоскости λ ;

– все функции ψ_j в соответствующих полуплоскостях достаточно быстро убывают когда аргумент по модулю стремится к $(+\infty)$ [6].

Нетрудно заметить, что оценку среднего значения m_η однородного поля η из (1) и (2) можно найти пользуясь тем что $m_\eta = \sum_j \sum_k a_{jk} m_\xi$. Здесь мы покажем что оценку \tilde{m}_η можно найти модифицируя условия налагаемые на спектральную характеристику оценки \tilde{m}_ξ . Оказывается, что в этом смысле имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть известны значения случайного поля η на прямоугольнике $S = \{(u, v) : -x \leq u \leq 0, -t \leq v \leq 0\}$ и пусть $[x/\theta_1] = m$ т.е. $m\theta_1 \leq x < (m+1)\theta_1$ и $[t/\theta_2] = n$, т.е. $n\theta_2 \leq t < (n+1)\theta_2$ и $m \geq p$, $n \geq q$. Тогда спектральная характеристика $\Phi_\eta(\lambda, \mu)$ наилучшей несмещенной оценки \tilde{m}_η значения m_η будет иметь вид

(6)

$$\begin{aligned}
\Phi_\eta(\lambda, \mu) = & h_1(\lambda, \mu) \cdot \sum_{l=0}^p \sum_{\nu=0}^q \tilde{a}_{l\nu}^{(1)} \exp\{-i(\lambda l\theta_1 + \mu\nu\theta_2)\} + \\
& + h_2(\lambda, \mu) \cdot \sum_{l=0}^p \sum_{\nu=0}^q \tilde{a}_{l\nu}^{(2)} \exp\{i(l\theta_1 + \mu\nu\theta_2)\} \exp\{-i\lambda x\} + \\
& + h_3(\lambda, \mu) \cdot \sum_{l=0}^p \sum_{\nu=0}^q \tilde{a}_{l\nu}^{(3)} \exp\{i(-\lambda l\theta_1 + \mu\nu\theta_2)\} \exp\{-i\mu t\} + \\
& + h_4(\lambda, \mu) \cdot \sum_{l=0}^p \sum_{\nu=0}^q \tilde{a}_{l\nu}^{(4)} \exp\{i(\lambda l\theta_1 + \mu\nu\theta_2)\} \exp\{-i(\lambda x + \mu t)\},
\end{aligned}$$

где $h_j(\lambda, \mu)$, $j = 1, 2, 3, 4$ рациональные функции, такие что функция $\Phi_\eta(\lambda, \mu)$ удовлетворяет условию (4).

Доказательство. Функция $\psi_\eta(\lambda, \mu)$ вида (5) будет следующей функцией

$$\begin{aligned}
\psi_\eta(\lambda, \mu) = & \Phi_\eta(\lambda, \mu)g_\eta(\lambda, \mu) - \delta[1 - \exp(-i\lambda x)][1 - \exp(-i\mu t)]/\lambda\mu = \\
= & h_1^*(\lambda, \mu) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(1)} \exp\{i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} + \\
& + h_2^*(\lambda, \mu) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(2)} \exp\{-i\lambda x + i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} + \\
& + h_3^*(\lambda, \mu) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(3)} \exp\{-i\mu t + i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} + \\
& + h_4^*(\lambda, \mu) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(4)} \exp\{-i(\lambda x + \mu t) + i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} - \\
& - \delta[1 - \exp(-i\lambda x)][1 - \exp(-i\mu t)]/\lambda\mu,
\end{aligned}$$

где $h_j^* = h_j \cdot g_\eta$ и $\bar{a}_{jk}^{(s)}$, пока, неизвестные коэффициенты. В функции $\psi_\eta(\lambda, \mu)$ мы сделаем следующий выбор:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\lambda, \mu) = & h_1^*(\lambda, \mu) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(1)} \exp\{i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} + \\
& + h_2^*(\lambda, \mu) \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(2)} \exp\{-i\lambda x + i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} + \\
& + h_3^*(\lambda, \mu) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(3)} \exp\{-i\mu t + i(\lambda j\theta_1 + \mu k\theta_2)\} +
\end{aligned}$$

$$+ h_4^*(\lambda, \mu) \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(4)} \exp\{-i(\lambda x + \mu t) + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} - \delta / \lambda \mu,$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\lambda, \mu) &= h_1^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-m-1} \sum_0^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(1)} \exp\{i\lambda x + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_2^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-1} \sum_0^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(2)} \exp\{i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_3^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-m-1} \sum_{n+1}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(3)} \exp\{i(\lambda x - \mu t) + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_4^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-1} \sum_{n+1}^{\infty} \bar{a}_{jk}^{(4)} \exp\{-i\mu t + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \delta / \lambda \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(\lambda, \mu) &= h_1^*(\lambda, \mu) \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{-n-1} \bar{a}_{jk}^{(1)} \exp\{i\mu t + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_2^*(\lambda, \mu) \sum_{m+1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{-n-1} \bar{a}_{jk}^{(2)} \exp\{i(-\lambda x + \mu t) + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_3^*(\lambda, \mu) \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{-1} \bar{a}_{jk}^{(3)} \exp\{i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_4^*(\lambda, \mu) \sum_{m+1}^{\infty} \sum_{-\infty}^{-1} \bar{a}_{jk}^{(4)} \exp\{-i\lambda x + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \delta / \lambda \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(\lambda, \mu) &= h_1^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-m-1} \sum_{-\infty}^{-n-1} \bar{a}_{jk}^{(1)} \exp\{i(\lambda x + \mu t) + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_2^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-1} \sum_{-\infty}^{-n-1} \bar{a}_{jk}^{(2)} \exp\{i\mu t + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_3^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-m-1} \sum_{-\infty}^{-1} \bar{a}_{jk}^{(3)} \exp\{i\lambda x + i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} + \\ &+ h_4^*(\lambda, \mu) \sum_{-\infty}^{-1} \sum_{-\infty}^{-1} \bar{a}_{jk}^{(4)} \exp\{i(\lambda j \theta_1 + \mu k \theta_2)\} - \delta / \lambda \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\lambda, \mu) &= \psi_{\eta}(\lambda, \mu) - [\psi_1(\lambda, \mu) + \exp\{-i\lambda x\} \psi_2(\lambda, \mu) + \\ &+ \exp\{-i\mu t\} \psi_3(\lambda, \mu) + \exp\{-i(\lambda x + \mu t)\} \psi_4(\lambda, \mu)]. \end{aligned}$$

В таком выборе функции ψ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условию (Я) и поэтому остаточный член $r(\lambda, \mu)$ будет равняться нулю. Пользуясь линейнои независимостью показательных функций мы получим что, неизвестные $\tilde{a}_{l\nu}^{(s)} = 0$, $l = \overline{0, p}$, $\nu = \overline{0, q}$ являются решениями системы линейных уравнений.

Функции h_1, h_2, h_3, h_4 определяются по такому же способу как и в случае рациональной спектральной плотности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть известны значения поля η в прямоугольнике S и пусть $0 \leq [x/\theta_1] = m \leq p$, $0 \leq [t/\theta_2] = n \leq q$. Тогда спектральная характеристика $\Phi_\eta(\lambda, \mu)$ оценки \tilde{m}_η имеет вид (6) в котором суммируется по l до $l = m$ и по ν до $\nu = n$;

Доказательство здесь совсем аналогично доказательству Теоремы 1.

Пример. Пусть

$$\begin{aligned} \eta(u, v) - \beta_1 \eta(u - \theta_1, v) &= \xi(u, v), \quad -1 < \beta_1 < 1, \\ g_\xi(\lambda, \mu) &= B_0 / (\lambda^2 + \alpha^2)(\mu^2 + \beta^2), \quad B_0 > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

и $[x/\theta_1] = m > 1$, $0 < t \leq \theta_1$. Спектральную характеристику оценки \tilde{m}_η по значениям на прямоугольнике S мы попробуем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(\lambda, \mu) &= \left[(\lambda - \alpha i)(\mu - \beta i) \sum_{j=0}^m a_j \exp\{-i\lambda\theta_1\} + \right. \\ &+ (\lambda + \alpha i)(\mu - \beta i) \exp\{-i\lambda x\} \sum_{j=0}^m a_j \exp\{i\lambda j\theta_1\} + \\ &+ (\lambda - \alpha i)(\mu + \beta i) \exp\{-i\mu t\} \sum_{j=0}^m a_j \exp\{-i\lambda j\theta_1\} + \\ &\left. + (\lambda + \alpha i)(\mu + \beta i) \exp\{-i(\lambda x + \mu t)\} \sum_{j=1}^m a_j \exp\{i\lambda j\theta_1\} \right] / \lambda \mu. \end{aligned}$$

Тогда получим что

$$a_0^{-1} = (2 + \beta t)[(1 - \beta_1)(2 + \alpha x) + 2\alpha\theta_1\beta], \quad a_1 = -\beta_1 a_0$$

и что все остальные коэффициенты будут равняться нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Т. Андерсон, *Статистический анализ временных рядов*, Мир, Москва, 1976.
- [2] С. Я. Виленкин, *Статистическая обработка результатов исследования случайных функций*, Советское радио, Москва, 1979.

- [3] Й. Малишич, *Экстраполирование стационарных процессов с нерациональными спектральными плотностями по значениям на конечном интервале*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **27 (41)** (1980), 169–174.
- [4] V. Jevremović, J. Mališić, *Ocene srednjih vrednosti stacionarnih proces pokretnih sredina i proces autoregresivnog tipa*, Math. Vesnik **35 (2)** (1983), 107–119.
- [5] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Dover New York, 1962.

Институт за математику
Природно-математички факултет
Студентски трг 16
11000 Београд

(Поступила 07 01 1985)