

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Б. Лакович

Резюме. Рассматриваются некоторые классы функций типа Бесова в метрике L_p , $p = (p_1, \dots, p_n)$ и доказываются теоремы вложения и совпадения для этих классов. Для $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ полученные результаты совпадают с известными результатами.

В этой статье рассматривается один класс функций типа Бесова в смешанной метрике и доказываются теоремы вложения по векторным параметрам p и k , с помощью которых определяется этот класс.

Пространство $L_p([0, 2\pi]^n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ определяется [1] как множество измеримых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, 2π -периодических по каждому переменному и таких, что

$$\|f\|_p([0, 2\pi]^n) \equiv \|f\|_p = \|\dots\| \|f\|_{p_1} \|p_2 \dots p_n$$

Если $\int_0^{2\pi} f dx_i = 0$ почти для всех $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ то для пространств L_p будем использовать и обозначение L_p^0 .

Через $\omega_{k_{i1}, \dots, k_{im}}(f, \delta_{i1}, \dots, \delta_{im})_p$ обозначим смешанный m -мерный ($m \leq n$) модуль гладкости порядков K_{ij} по переменным x_{ij} функции $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$:

$$\omega_{k_{i1}, \dots, k_{im}}(f, \delta_{i1}, \dots, \delta_{im})_p = \sup_{|h_{i1}| \leq \delta_{i1}, \dots, |h_{im}| \leq \delta_{im}} \left\| \Delta_{h_{i1} \dots h_{im}}^{k_{i1} \dots k_{im}} \right\|_p$$

где

$$\Delta_{h_i}^{k_i} f = \sum_{\nu_i=0}^{k_i} (-1)^{k_i-\nu_i} C_{k_i}^{\nu_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \nu_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\Delta_{h_{i1} \dots h_{ij}}^{k_{i1} \dots k_{ij}} F = \Delta_{k_{i1}}^{k_{i1}} (\Delta_{k_{i2} \dots k_{ij}}^{k_{i2} \dots k_{ij}} F)$$

Следуя М. К. Потапову, определим наилучшее приближение m -мерным “углом” функции f по переменным x_{i_1}, \dots, x_{i_m} как величину

$$Y_{l_{i_1} \dots l_{i_m}}(f)_p = \inf_{T_{i_1}, \dots, T_{i_m}} \left\| f - \sum_{j=1}^m T_{l_{i_j}} \right\|_p; \quad l_{i_j} \in N \cup \{0\}$$

где каждая функция $T_{l_{i_j}} \in L_p$ и является тригонометрическим полиномом порядка l_{i_j} только по одной переменной x_{i_j} .

Пусть функции $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют условиям: Каждая функция $\alpha_i(t)$ 1° измерима на $[0, 2\pi]^n$ 2° суммируема на $[\delta_i, 2\pi]$ для каждого $\delta_i \in (0, 2\pi)$.

Класс функции $SB(p, \theta, k, \alpha)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i \in (0, \infty)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in N$, $\alpha = (\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_2), \dots, \alpha_n(t_n))$, определим как множество функций $f(x_1, \dots, x_n) \in L_p([0, 2\pi]^n)$ и таких, что для каждого набора чисел i_1, i_2, \dots, i_m , $1 \leq i_j \leq n$, $1 \leq j \leq m \leq n$ величина.

$$I_1^{\theta_{i_m}} = \int_0^{2\pi} \alpha_{i_m}(t_{i_m}) \left\{ \dots \left\{ \int_0^{2\pi} \alpha_{i_1}(t_{i_1}) \omega_{k_{i_1} \dots k_{i_m}}(f, t_{i_1}, \dots, \right. \right. \\ \left. \left. t_{i_m})_p dt_{i_1} \right\}^{\theta_{i_2}/\theta_{i_1}} dt_{i_m-1} \right\}^{\theta_{i_m}/\theta_{i_m-1}} dt_{i_m}$$

конечна.

Будем говорить, что вектор α удовлетворяет $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ условию, если существуют действительные числа σ_i , $i = 1, \dots, n$ такие, что для каждого $\delta_i \in (0, 2\pi)$ и $\varepsilon_i > 0$

$$\int_0^{\delta_i} \alpha_i(t) t^{\sigma_i} dt = \infty \quad \text{и} \quad \int_0^{\delta_i} \alpha_i(t) t^{\sigma_i - \varepsilon_i} dt = \infty.$$

Если еще выполнены условия

$$\int_0^{\delta_i} \alpha_i(t) t^{\sigma_i^*} dt \ll \int_{\delta_i}^{2\delta_i} \alpha_i(t) t^{\sigma_i^*} dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sigma_i \leq \sigma_i^*$$

то будем говорить, что вектор α удовлетворяет σ^* условию, причем запись $A(f) \ll B(f)$ будет обозначать, что для функционалов $A(f)$ и $B(f)$ существует постоянная C – может быть, даже зависящая от некоторых фиксированных параметров, но не зависящая от f – такая что $A(f) \leq C \cdot B(f)$.

Будем говорить, что вектор α удовлетворяет $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i – действительные числа, условию, если для каждого $\delta \in (0, \pi)$

$$\int_{2\delta}^{2\pi} \alpha_i(t) t^{\lambda_i} dt \ll \int_{\delta}^{2\delta} \alpha_i(t) t^{\lambda_i} dt.$$

Целью статьи является доказательство следующих теорем:

ТЕОРЕМА 1. Пусть вектор α удовлетворяет $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ условию $1 \leq p_i \leq \infty$, $0 < \theta_i < \infty$. Тогда:

а. если $k_i \theta_i < \sigma_i \forall i = 1, \dots, n$ то класс $SB(p, \theta, k, \alpha)$ содержит все константы и только их;

б. если существуют числа i_1, \dots, i_l , $1 \leq l < n$ такие, что $k_{i_s} \theta_{i_s} < \sigma_{i_s}$, $s = 1, \dots, l$ и j_1, \dots, j_{n-l} такие, что $k_{i_\nu} \theta_{i_\nu} \geq \sigma_{i_\nu}$, $\nu = 1, \dots, n-l$, то класс $SB(p, \theta, k, \alpha)$ содержит все функции, зависящие от $x_j, \dots, x_{j_{n-l}}$ и только эти функции;

в. если $k_i \theta_i \geq \sigma_i^*$ и $k_i^{(1)} \theta_i \geq \sigma_i^*$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ то классы $SB(p, \theta, k, \alpha)$ и $SB(p, \theta, k^{(1)}, \alpha)$ совпадают для всех k и $k^{(1)}$;

г. если $\sigma_i \leq k_i^{(2)} \theta_i < \sigma_i^*$, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ то класс $SB(p, \theta, k^{(1)}, \alpha)$ не совпадает ни с одним из класса в.

ТЕОРЕМА 2. Пусть векторы $p, q, \sigma^*, \lambda, k, k^*$ такие что $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $0 < \theta_i < \infty$, $k_i \theta_i \geq \sigma_i^*$, $k_i^* \geq \sigma_i^* / \theta_i - 1/p_i - 1/q_i$, $\lambda_i / \theta_i \geq R_i$ (где здесь и в дальнейшем пользуемся обозначением $R_i = 1/p_i - 1/q_i$), вектор α удовлетворяет σ^* и λ условиям и $\alpha^*(t_1, \dots, t_n) = (\alpha_1^*(t_1), \dots, \alpha_n^*(t_n))$ где $\alpha_i^*(t_i) = \alpha_i(t_i) t_i^{\theta_i R_i}$. Тогда справедливо вложение

$$SB(p, \theta, k, \alpha) \subset SB(q, \theta, k^*, \alpha^*)$$

Аналогичные результаты для функции одной переменной получены Потаповым [2] и [3].

Доказательство утверждений а. и б. теоремы можно провести как и доказательство аналогичных утверждений для функций одной переменной и мы его опускаем. Для доказательства утверждения г. достаточно на случай функции n переменных перенести следующий пример: Непрерывная функция $f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} a^n \cos a^{-n} x$ $0 < a, 1$ имеет модули непрерывности [4] $\omega(f, t)_c = O(t)$ и $\omega_1(f, t) > A \ln t^{-1}$ где A некоторая положительная константа. Если положить

$$\alpha(t) = t^{-\theta-1} (\ln t^{-1})^{-\gamma} \text{ где } 1 < \gamma \leq 1 + \theta, \text{ то } \int_0^\delta \alpha(t) \omega_1^0(f, t)_c dt = \infty$$

и $\int_0^\delta \alpha(t) \omega_2^0(f, t)_c dt < \infty$ и, значит, $f \in B(p, \theta, 2, \alpha)$, но $f \notin B(p, \theta, 1, \alpha)$.

Для доказательства части в. теоремы 1 и теоремы 2 нам нужны некоторые леммы.

Если обозначить $\mu_i(n) = \int_{2^{-n}}^{2 \cdot 2^{-n}} \alpha_i(t) dt$. то справедлива

ЛЕММА 1. [2] Пусть вектор $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет σ^* условию и $k_i \theta_i \geq \sigma_i^*$, $\forall i = 1, \dots, n$. Тогда, для $m \geq 0$

$$S \equiv \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\mu_i(n)}{2^{nk_i \theta_i}} \ll \frac{\mu(m)}{2^{mk_i \theta_i}}$$

ЛЕММА 2. Если $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$, i_1, \dots, i_m ($1 \leq i_j \leq m \leq n$) данные натуральные числа, то

$$\begin{aligned} Y_{l_{i_1} \dots l_{i_m}}(f)_p &\leq \omega_{k_{i_1} \dots k_{i_m}}(f, 1/l_{i_1} + 1, \dots, 1/l_{i_m} + 1)_p \ll \\ &\ll \prod_{j=1}^m (l_{i_j} + 1)^{k_{i_j}} \sum_{\nu_{i_j}=0}^{l_{i_1}} \dots \sum_{\nu_{i_m}=0}^{l_{i_m}} \prod_{j=1}^m (\nu_{i_j} + 1)^{k_{i_j}-1} Y_{\nu_{i_1} \dots \nu_{i_m}}(f)_p \end{aligned}$$

Для функции одной переменной лемма 2 доказана в [4], а для функций многих переменных в [5].

ЛЕММА 3. [1] и [3]:

а. Если $a_n \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, то $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta)^{1/\beta} \leq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha)^{1/\alpha}$.

б. Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $1 \leq \theta < \infty$, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m \beta_m$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^n b_m \right)^\theta \ll \sum_{n=m}^{\infty} a_n (b_n \beta_n)^\theta$$

в. Пусть $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $1 \leq \theta < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_m \gamma_m$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=n}^{\infty} b_m \right)^\theta \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\gamma_n b_n)^\theta.$$

Через $S_Y(p, \theta, \alpha)$ обозначим класс функций $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$ таких что для всех i_1, \dots, i_m , $1 \leq i_j \leq n$, $1 \leq j \leq m \leq n$.

$$\sum_{i_m=0}^{\infty} \mu_{i_m}(i_m) \left\{ \dots \left\{ \sum_{i_1=0}^{\infty} \mu_{i_1}(i_1) Y_{I_1, \dots, I_m}^{\theta_{i_1}}(f)_p \right\}^{\theta_{i_2}/\theta_{i_1}} \dots \right\}^{\theta_{i_m}/\theta_{i_{m-1}}} < \infty,$$

где для краткости положено $I_k = 2^{i_k-1}$, $k = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 4. Пусть функция $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет σ^* условию и $k_i \theta_i \geq \sigma_i^*$, $\forall i = 1, \dots, n$. Тогда: $S_Y(p, \theta, \alpha) \subset S_B(p, \theta, k, \alpha)$.

Для простоты доказательства, лемму 4 проведем для случая $n = 2$. Так как модуль гладкости непрерывная неубывающая функция, то

$$I_2^{\theta_1} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) \omega_{k_1 k_2}^{\theta_{i_1}}(f, 2^{-n_1} 2^{-n_2})_p \right\}^{\theta_2/\theta_1} \equiv I_2^{\theta_2}$$

учитывая лемму 2, получим, что

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} P^{\theta_1} \right\}^{\theta_1/\theta_2},$$

где

$$P = \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_1 k_1} 2^{m_2 k_2} Y_{M_1 M_2}(f)_p$$

и где, как и выше, $M_i = 2^{m_i-1}$, $i = 1, 2$.

Пусть $0 < \theta_1 < 1$. Применяя лемму За, потом лемму 1 получим:

$$\begin{aligned}
I_2^{\theta_2} &\ll \\
&\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_1} 2^{m_1 k_1 \theta_1} 2^{m_2 k_2 \theta_2} Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} = \\
&= \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_2 k_2 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} 2^{m_1 k_1 \theta_1} y^{\theta_1} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} \ll \\
&\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{n_2 k_2 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{M_1 M_2}^{\theta_1}(f)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1}.
\end{aligned}$$

Если $\theta_2 < \theta_1$, то, применяя еще раз лемму За, а потом лемму 1 имеем:

$$\begin{aligned}
I_2^{\theta_2} &\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} \ll \\
&\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y_{M_1 M_2}^{\theta_1}(f)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1} \quad (1)
\end{aligned}$$

Для $\theta_2 \geq \theta_1$ то же неравенство следует после применения лемм 3б и 1. Пусть теперь, $\theta_1 \geq 1$. Учтывая лемму 3б, а потом лемму 1, имеем:

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \left[\sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{n_1 k_1} 2^{m_2 k_2} Y \right]^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Так как $\theta_1 \geq 1$, можно применить неравенство Минковского для сумм:

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{m_2 k_2} Y \right]^{1/\theta_1} \right\}^{\theta_2}$$

откуда если $\theta_2 > 1$, применяя лемму 3б, а если $\theta_2 \leq 1$ лемму За, а потом лемму 1 получим неравенство (1). Лемма 4 этим доказана.

ЛЕММА 5. Если $1 \leq p_i \leq \infty$, $0 < \theta_i < \infty$, то $SB(p, \theta, k, \alpha) \subset SY(p, \theta, \alpha)$.

Доказательство леммы следует непосредственно из определений рассматриваемых классов и леммы 2.

ЛЕММА 6. [2] Если вектор $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет λ условию то

$$\text{а. } 2^{n\lambda_i} \ll \mu_i(n) \quad \text{б. } \sum_{n=0}^m \mu_i(n) 2^{-n\lambda_i} \ll \mu_i(m) 2^{-m\lambda_i}.$$

ЛЕММА 7. [6] Пусть $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$, $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $\rho_i = q_i$ если $q_i < \infty$ и $\rho_i = 1$, если $q_i = \infty$. Тогда, если величина

$$I^{\rho_n} = \sum_{m_n=0}^{\infty} \left\{ \dots \left\{ \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} S \right)^{\rho_2/\rho_1} \right\}^{\rho_3/\rho_2} \dots \right\}^{\rho_n/\rho_{n-1}},$$

где

$$S = \prod_{i=1}^n 2^{m_i R_i} \rho Y_{M_1 M_2}^{\rho_1}(f)_p,$$

конечна, то $f \in L_q^0([0, 2\pi]^n)$ и кроме того, справедливо неравенство

$$Y_{k_1 \dots k_n}^{\rho_n}(f)_q \ll \sum_{m_n=k_n}^{\infty} \left\{ \dots \left[\sum_{m_2=k_2}^{\infty} \left(\sum_{m_1=k_1}^{\infty} S \right)^{\rho_2/\rho_1} \right]^{\rho_3/\rho_2} \dots \right\}^{\rho_n/\rho_{n-1}}$$

ЛЕММА 8. Пусть $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$. Тогда $f = \sum_{i \leq i_j \leq n} F_{i_1 \dots i_j \dots i_m} + F_0$ где F_0 константа, а $\int_0^{2\pi} F_{i_1 \dots i_j \dots i_m} dx_{ij} = 0$ для почти всех $i_1, \dots, i_j - 1, i_j + 1, \dots, i_m$ и всех $j = 1, 2, \dots, m$ и $F_{i_1 \dots i_j \dots i_m} \in L_{p^*}([0, 2\pi]^m)$, $p^* = (p_{i_1}, \dots, p_{i_m})$.

Утверждение леммы 8 есть следствие аналогичной леммы Лизоркина-Никольского [7] для случая $p_1 = p_2 = \dots = p_n$.

ЛЕММА 9. Если $f \in L_p^0([0, 2\pi]^n)$, то

$$\omega_{k_1 \dots k_s}(t, \delta_1, \dots, \delta_s)_{p^*} \ll \omega_{k_1 \dots k_s \dots k_n}(f, \delta_1, \dots, \delta_s, 1, \dots, 1)_p$$

В метрике L_p лемма 9 доказана в [8], а в метрике L_p^0 доказательство аналогично.

Через $\sum SB^0(p, \theta \alpha)$ обозначим класс функций $f(x_1, \dots, x_n) \in L_p([0, 2\pi]^n)$ и таких, что для всех функций $F_{i_1 \dots i_m}$ из леммы 8 справедливо неравенство

$$I_1^{\theta_{im}} = \int_0^{2\pi} \alpha_{im}(t_{im}) \left\{ \dots \left\{ \int_0^{2\pi} \alpha_{i_1}(t_{i_1}) \omega_{k_{i_1} \dots k_{i_m}}(F_{i_1 \dots i_m}, t_{i_1}, \dots, t_{i_m})_{p^*} dt_{i_1} \right\}^{\theta_{i_2}/\theta_{i_1}} \dots \right\}^{\theta_{im}/\theta_{i_{m-1}}} dt_{im} < \infty \quad (2)$$

При выполнении условия (2) для функции $F_{i_1 \dots i_m}$ из леммы 8 будем писать, что $F_{i_1 \dots i_m} \in SB_0(p^*, \theta^*, \alpha^*, k, m^*)$, $p^* = (p_{i_1}, \dots, p_{i_m})$, $\theta^* = (\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_m})$, $\alpha^* = (\alpha_{i_1}(t_{i_1}), \dots, \alpha_{i_m}(t_{i_m}))$, $k^* = (k_{i_1}, \dots, k_{i_m})$.

ЛЕММА 10. Классы $SB(p, \theta, \alpha, n)$ и $\sum SB^0(p, \theta, \alpha, n)$ совпадают.

Утверждение леммы следует из леммы 9 и того обстоятельства, что

$$\omega_{k_{i_1} \dots k_{i_s}}(F_{i_1 \dots i_s}, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s})_{p^*} = \omega_{k_{i_1} \dots k_{i_s}}(f - \Phi, \delta_{i_s}, \dots, \delta_{i_s})_{p^*}$$

где Φ – сумма всех функций из леммы 8 зависящих от всех x_{ij} для выбранных индексов.

ЛЕММА 11. [9] Если функция $\alpha(t)$ удовлетворяет λ условию, $0 < \theta < \infty$, $0 < \rho < \infty$, $A_n \geq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то справедливо неравенство

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\lambda\rho/\theta} A_{2^n}^\rho \right\}^{1/\rho} \ll \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) A_{2^n}^\theta \right\}^{1/\theta}.$$

Доказательство теоремы 1 в. Из лемм 4 и 5 следует, что если вектор $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет σ^* условию, то для каждого k_i , $k_i \theta_i \geq \sigma_i^*$, $\forall i = 1, \dots, n$ классы $SB(p, \theta, k, \alpha)$ совпадают с классом $SY(p, \theta, \alpha)$ но тогда совпадают и между собой, а это и есть утверждение теоремы 1в.

Доказательство теоремы 2. И эту теорему мы докажем для случая $n = 2$. Пусть $f(x, y) \in SB(p, \theta, k, \alpha)$. Тогда, по лемме 10, $f \in \sum SB^0(p, \theta, k, \alpha)$ и для функций F_{12} , F_1 и F_2 из леммы 8 справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} I_3^{\theta_2} &= \int_0^{2\pi} \alpha_2(t_2) \left\{ \int_0^{2\pi} \alpha_1(t_1) \omega_{k_1 k_2}^{\theta_1}(F_{12}, t_1, t_2)_p dt_1 \right\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 < \infty \\ I_4 &= \int_0^{2\pi} \alpha_1(t) \omega_{k_1}^{\theta_1}(F_1, t)_{p_1} dt < \infty \\ I_5 &= \int_0^{2\pi} \alpha_2(t) \omega_{k_2}^{\theta_2}(F_2, t)_{p_2} dt < \infty. \end{aligned}$$

Надо доказать, что $f \in SB(q, \theta, k^*, \alpha^*)$ или $f \in \sum SB^0(q, \theta \alpha^*. n)$. Докажем сначала, что $F \equiv F_{12} \in L_q^0$. Для этого, по лемме 7, достаточно проверить, что сходится ряд

$$A = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 R_1 \rho_1} 2^{n_2(1/p_2 - 1/q_1) \rho_1} Y_{N_1 N_2}^{\rho_1}(F)_p \right\}^{\rho_1/\rho_2}.$$

так как $\lambda_i \geq \theta_i R_i$, то

$$A \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 R_1 \rho_1 / \theta_2} 2^{n_2 \lambda_2 \rho_1 / \theta_2} Y_{N_1 N_2}^{\rho_1}(F)_p \right\}^{\rho_2/\rho_1}.$$

Применяя два раза лемму 11, получим:

$$A \ll \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{N_1 N_2}^{\theta_1}(F)_p \right]^{\theta_2/\theta_1} \right\}^{\rho_2/\rho_1}.$$

Из предположения, что $I_3 < \infty$ и леммы 5 следует шодимость ряда

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{N_1 N_2}^{\theta_1}(F)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Этим доказано, что и $A < \infty$, т.е. $F_{12} \in L_q^0$. Тем же способом можно доказать, что $F_1 \in L_{q_1}^0$ и $F_2 \in L_{q_2}^0$ и, значит, $f \in L_q([0, 2\pi]^n)$. Вектор α удовлетворяет σ^* условию. Нетрудно видеть, что вектор α^* удовлетворяет σ'^* условию, где $\sigma'^* = (\sigma_i'^*, \dots, \sigma_n'^*)$ и $\sigma_i'^* = \sigma_i^* - R_i\theta_i$. Тогда для $k_i^* \geq \sigma_i^*/\theta_i$ на основании теоремы 1 следует:

$$I_6^{\theta_2} = \int_0^{2\pi} \alpha_2^*(t_2) \left\{ \int_0^{2\pi} \alpha_1^*(t_1) \omega_{k_1^* k_2^*}^{\theta_1} (F_{12} t_1, t_2)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \ll \\ \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} B^{\theta_1/\rho_2} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

где $B = \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \rho_2} [\sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\rho_1}(F)_p]^{\rho_1/\rho_2}$.

И. Пусть $\theta_1 \leq \rho_2$. Применяя лемму 3а, а затем меняя порядок суммирования, имеем $I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} C \right\}^{\theta_2/\theta_1} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{m_2 R_1 \theta_1} \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} D^{\theta_1/\rho_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$ где $C = \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_1} [\sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\rho_1}]^{\theta_1/\rho_1}$, $D = \sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\rho_1}$.

Иа. Пусть $\rho_1 \geq \theta_1$. Применяя лемму 3а, меняя порядок суммирования, и применяя лемму 6, получим что

$$E = \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} \cdot D^{\theta_1/\rho_1} \ll \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} \cdot \sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\theta_1} = \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\theta_1} \sum_{n_1=0}^{m_1} \mu_1(n_1) 2^{-m_1 \lambda_1} 2^{n_1 [\lambda_1 - R_1 \theta_1]} \ll \\ \ll \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y_{M_1 M_2}^{\theta_1}(F)_p$$

Иб. Если $\rho_1 < \theta_1$, то, применяя лемму 3в, а затем лемму 6, получим, что и в этом случае

$$E \ll \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y_{M_1 M_2}^{\theta_1}(F)_p$$

Тогда $I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$. Если $\theta_2 \geq \theta_1$, то применяя леммы 3б и 6 получим, что

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y_{M_1 M_2}^{\theta_1}(F)_p \right\}^{\theta_1/\theta_2} \quad (3)$$

Если $\theta_2 < \theta_1$, то применяя лемму 3а, меняя порядок суммирования, и применяя затем лемму 6, получим справедливость неравенства (3).

II. Пусть $\theta_1 > \rho_1$. Применяя неравенство Минковского получим:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} G^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}, \text{ где}$$

$$G = \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} \cdot D.$$

Если $\rho_1 > \theta_1$, то по лемме За имеем:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_1 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} H^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}, \text{ где}$$

$$H = \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 R_1 \theta_1} \sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\theta_1}(F).$$

Изменяя порядок суммирования, учитывая, что $\lambda_i \geq R_i \theta_i$ и применяя лемму б, получим:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right]^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}$$

Если $\rho_2 > \theta_2$, то на основании леммы За,

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Из этого неравенства следует справедливость неравенства $I_6^{\theta_2} \ll \infty$. Неравенство $I_6^{\theta_2} \ll \infty$ и в остальных случаях можно получить применением лемм За.б.в леммы б.

Аналогично получают и оценки

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \alpha_1^*(t) \omega_{k_1}^{\theta_1}(F_1, t)_q dt < \infty, \quad I_8 = \int_0^{2\pi} \alpha_2^*(t) \omega_{k_2}^{\theta_2}(F_2, t)_q dt < \infty.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* ■
Наука, Москва 1969.
- [2] М. К. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций*, Известия АН СССР, серия матем. **33** (1969), 840–860.

- [3] М. К. Потапов, *Об одной теореме вложения*, *Mathematica* **14 (37)** (1972), 123–146.
- [4] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Москва, 1960.
- [5] М. К. Потапов, *Приближение “углом” и теоремы вложения*, *Math. Balkanica* **2** (1972), 183–198.
- [6] М. К. Потапов, *Теоремы вложения в смешанной метрике*, Труды МИААН СССР, **156** (1980), 143–156.
- [7] П. И. Лизоркин, П. М. Никольский, *Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной*, МИАН СССР (1965), 77–143.
- [8] М. К. Потапов, *Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича-Литтлвуда-Пэли, приближение “углом” и вложение некоторых классов функций*, *Математика* **14 (37)**, (1972), 339–362.
- [9] Б. Лакович, М. К. Потапов, *К вопросу о взаимосвязи некоторых классов функций*, *Мат. Весник* **3 (16) (31)**, (1979), 295–310.

Институт за математику и физику,
81000 Титоград, Југославија

(Поступила 01 03 1985)