

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КЛАССАМ БЕСОВА

Мухарем Бериша

Резюме. В этой работе определены достаточные условия которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье функции $f(x)$ чтобы она принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$.

0. В работе [1] были получены необходимые и достаточные условия (в терминах коэффициентов Фурье) для принадлежности четных функций с монотонными коэффициентами Фурье классам функций типа Бесова.

В работе [2] были определены необходимые условия которые должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы функция принадлежала классу $B(p, \theta, k, \alpha)$.

В настоящей работе указаны достаточные условия которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы в общем случае функция

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu x) \text{ где } c_{\nu} = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt,$$

принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$. В данном случае функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию:

$$(*) \quad \int_0^{\delta} \alpha(t) t^{\sigma} dt \leq C \delta^{\sigma} \int_0^{2\delta} \alpha(t) dt$$

для всех $\delta \in (0, \delta_0)$.

Отметим, что в настоящей работе утверждения доказывающа при помощи наилучших приближений.

Необходимые определения смотри в работе [2].

1. Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике L_p при помощи тригонометрических полиномов не выше чем n , т.е.

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \|f(x) - T_n(x)\|_p$$

Будем говорить что некоторая функция $\alpha(t)$ есть функция типа σ , если она измерима на $[0, 1]$, суммируема на $[\delta, 1]$ для любого $\delta \in (0, 1)$ и если существуют действительные числа $\sigma, \delta > 0$ и число $\delta_0 \in (0, 1)$ такие что:

1. $\alpha(t) \geq C$ для всех $t \in [0, 1]$
2. $\int_0^\delta \alpha(t)t^s dt < \infty$ для всех $s < \sigma$ и $\delta \in (0, \delta_0)$
3. $\int_0^\delta \alpha(t)t^s dt = \infty$ для всех $s < \sigma$ и $\delta \in (0, \delta_0)$.

Будем говорить, что $f(x) \in B(p, \theta, \alpha)$ если:

1. $f(x) \in L_p$, для некоторого p из промежутка $1 \leq p \leq \infty$
2. θ некоторое число из промежутка $0 < \theta < \infty$
3. $\alpha(t)$ функция типа σ
4. $I = \int_0^1 \alpha(t)\omega_k^0(f, t)_p dt < \infty$,

где k некоторое натуральное число удовлетворяющее $k > \sigma/\theta$. Условие $k\theta > \sigma$ гарантирует, что класс $B(p, \theta, \alpha)$ состоит не только из констант [5].

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы

ЛЕММА 1. [5] Пусть $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < \infty$ и $\alpha(t)$ функция типа σ , тогда для любого натурального числа k удовлетворяющего $k < \sigma/\theta$ справедливо неравенство:

$$\int_0^1 \alpha(t)\omega_k^0(f, t)_p dt \leq C_1 \{E_0^\theta(t)_p + E_1^\theta(t)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu)E_{2^\nu}^\theta(f)_p\}$$

где C_1 не зависит от $f(x)$ и

$$\mu(\nu) = \int_{1/2^\nu}^{2/2^\nu} \alpha(t)dt, \quad \nu \geq 1, \quad \mu(0) = 1.$$

ЛЕММА 2. [4, Т. 19, стр. 43] Пусть числа α, β и a_ν таковы, что $a_\nu \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, тогда справедливо неравенство:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta \right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

ЛЕММА 3. [7] Пусть числа a_ν, b_ν и γ_ν таковы, что $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$ и $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_n \gamma_n$, тогда для p из промежутка $1 \leq p < \infty$ справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p$$

2. ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы периодическая функция*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(i\nu x)$$

принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$ при $2 \leq p \leq \infty$, достаточно чтобы её коэффициенты Фурье удовлетворяли следующим условиям:

для $\theta \leq p$:
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) < \infty$$

для $\theta \geq p$:
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \{b(|\nu|)/A(|\nu|)\}^{\theta/p-1} < \infty$$

где
$$A_{\nu} = \int_{1/\nu+1}^{1/\nu} \alpha(t) dt \text{ и } b_{\nu} = \int_{1/\nu+1}^1 \alpha(t) dt$$

Доказательство . Используя лемму 1 и неравенство [3]:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2\nu}^{\theta}(f)_p \leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_{\nu}^{\theta}(f)_p$$

имеем $I \leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_{\nu}^{\theta}(f)_p$.

Для $p \geq 2$ имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_{\nu}^{\theta}(f) \leq C - 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(|\nu|) \left(\sum_{|n|=\nu}^{\infty} |c_n|^p |n|^{p-2} \right)^{\theta/p}.$$

Если $\theta \leq p$, тогда применяя лемму 2 имеем:

$$\begin{aligned} I &\leq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta-2\theta/p} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_n|^{\theta} |n|^{\theta-2\theta/p} b(|n|). \end{aligned}$$

Если $\theta \geq p$, тогда применяя лемму 3 имеем:

$$I \leq C_6 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) [\gamma(|\nu|) |c_{\nu}|^p |\nu|^{p-2}]^{\theta/p}$$

где $b(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) = A(n)\gamma(n)$. Значит,

$$I \leq C_7 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \{b(|\nu|)/A(|\nu|)\}^{\theta/p-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} \exp(ikx)$$

принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$ при $1 < p \leq 2$ достаточно чтобы её коэффициенты Фурье удовлетворяли следующим условиям:

$$\text{для } \theta \leq 2 \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} b(|n|) < \infty$$

$$\text{для } \theta \geq 2 \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} b(|n|) \{b(|n|)/A(|n|)\}^{\theta/2-1} < \infty$$

Доказательство. Пусть $1 < p \leq 2$, тогда очевидно, что

$$E_n(f)_p \leq C_8 E_n(f)_2$$

На основании равенства Парсеваля следует

$$I \leq C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_{\nu}^{\theta} \leq C_{10} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^2 \right)^{\theta/2}.$$

Если $\theta \leq 2$, применяя лемму 2 имеем:

$$\begin{aligned} I &\leq C_{11} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} \right) = C_{11} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) = \\ &= C_{11} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} b(|n|). \end{aligned}$$

Если $\theta \geq 2$, тогда на основании леммы 3 имеем:

$$\begin{aligned} I &\leq C_{12} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(\nu) [\gamma(|\nu|) |c_{\nu}|^2]^{\theta/2} = \\ &= \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} A^{1-\theta/2}(|\nu|) b^{\theta/2}(|n|) = \\ &= \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_{\nu}|^{\theta} b(|\nu|) \{b(|\nu|)/A(|\nu|)\}^{\theta/2-1}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Бериша, *О коэффициентах Фурье некоторых классов функций*, Glasnik Mat. **16(36)** (1981, 75–90).

- [2] М. Бериша, *Необходимые условия коэффициентов Фурье периодических функций принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$ классам типа Бесова*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) **35(49)**(1984), 87–91.
- [3] М. Бериша, *О коэффициентах Фурье периодических функций принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$ – классам*, Mat. Balkanica, (в печати).
- [4] Г.Б. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ГИИЛ Москва, 1984.
- [5] К.М. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций*, Изв. АН СССР **4**(1969), 840–860.
- [6] К.М. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Matematica (Cluj), **14(37)**(1972), 123–146.

Природно-математички факултет
38000 Приштина
Југославија

(Поступила 28 09 1984)