PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 36 (50), 1984, pp. 125–136

СООТВЕтсТВИЯ ГАЛУА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКАМИ, *II*

М.И. Миличич

Определим операции над временными отношениями. Как в [4] и [5], будем рассматривать только конечно-арные временные отношения-симметрично к конечно местным функциями. Некоторые операции над временными отношениями можно определить симметрично определению операций над функциями с задержками.

Операции (1) – (4) легко переносятся на отношения. Пусть $R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), \dots, (i, \rho_i), \dots\}$ заданное временное отношение арности m, тогда

$$\zeta R = \{(0, \zeta\rho_0), (1, \zeta\rho_1), \dots, (i, \zeta\rho_i), \dots\} \tag{1}$$

где

$$\forall i \in N_1 \ \ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \zeta\rho_i \leftrightarrow (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \alpha_1) \in \rho_i;$$

$$\tau R = \{(0, \tau\rho_0), (1, \tau\rho_1), \dots, (i, \tau\rho_i), \dots\} \tag{2}$$

где

$$\forall i \in N_1 \ \ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \tau\rho_i \leftrightarrow (\alpha_2, , \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_m) \in \rho_i;$$

$$\Delta R = \{(0, \Delta\rho_0), (1, \Delta\rho_1), (2, \Delta\rho_2), \dots, (i, \Delta\rho_i), \dots\}, \tag{3}$$

где

$$\forall i \in N_1 \ \ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) \in \Delta\rho_i \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) \in \rho_i;$$

$$\nabla R = \{(0, \nabla\rho_0), (1, \nabla\rho_1), (2, \nabla\rho_2), \dots, (i, \nabla\rho_i), \dots\}, \tag{4}$$

где

$$\forall i \in N_1 (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \in \nabla\rho_i \leftrightarrow (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}) \in \rho_i.$$

Операцию (5) вводим следующим образом. Если $R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots, (i, \rho_i), \dots\}$ m-арное, а $S = \{(0, \sigma_0), (1, \sigma_1), (2, \sigma_2), \dots, (i, \sigma_i), \dots\}$

AMS Subject Classification (1980): Primary 68 E 99.

p-арное временное отношение на E_k, тогда под их суперпозицией понимается временное отношение арности $m+p-2$:

$$R*S = \{(0,\rho_0*\sigma_0),(1,\rho_1*\sigma_1),(2,\rho_2*\sigma_2),\dots,(i,\rho_i*\sigma_i),\dots\}$$

где

$$\forall i\in N_1\ \ (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{m+p-2})\in\rho_i*\sigma_i \leftrightarrow (\exists\beta\in E_k)((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-1},\beta)\in\rho_i \wedge(\beta,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_{m+p-2})\in\sigma_i).$$

Введем еще три операции над временным отношениями

(6) Пусть $\mathcal{R}=\{R_j\}_{j\in N_1}$ последовательность временных отношений, где

$$(*)\qquad \begin{array}{l} R_0=\{(0,\rho_0^{(0)}),(1,\rho_1^{(0)}),(2,\rho_2^{(0)},(3,\rho_3^{(0)}),\dots\},\\ R_1=\{(0,\rho_0^{(1)}),(1,\rho_1^{(1)}),(2,\rho_2^{(1)},(3,\rho_3^{(1)}),\dots\},\\ R_2=\{(0,\rho_0^{(2)}),(1,\rho_1^{(2)}),(2,\rho_2^{(2)},(3,\rho_3^{(2)}),\dots\},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ R_j=\{(0,\rho_0^{(j)}),(1,\rho_1^{(j)}),(2,\rho_2^{(j)},(3,\rho_3^{(j)}),\dots\},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

и кроме того

$$\begin{array}{l} \rho_1^{(0)}\subseteq\rho_0^{(1)},\\ \rho_2^{(0)},\rho_1^{(1)},\subseteq\rho_0^{(2)},\\ \rho_3^{(0)},\rho_2^{(1)},\rho_1^{(2)},\subseteq\rho_0^{(3)},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \rho_j^{(0)},\rho_{j-1}^{(1)},\rho_{j-2}^{(2)},\dots,\rho_2^{(j-2)},\rho_2^{(j-1)}\subseteq\rho_0^{(j)},\\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Тогда под сверх-суперпозицией отношений R_0, R_1, R_2, $\dots$, R_j, $\dots$ понимается отношение $R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$ где $\rho_i=\rho_0^{(i)}$ для каждого $i\in N_1$.

(7) Пусть $R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$
временное отношение и $n_0\in N_1$, будем говорить, что временное отношение

$$R_{sn_0}=\{(0,\rho_{n_0}),(1,\rho_{n_0+1}),(2,\rho_{n_0+2}),\dots\}$$

получается из R применением операции сдвига.

(8) Пусть $\{R_\lambda\}_{\lambda\in I}$, где множество индексов может быть как конечным, так и бесконечным (счетым или континуальным), множество временных отношений

$$R_\lambda=\{(0,\rho_0^{(\lambda)}),(1,\rho_1^{(\lambda)}),(2,\rho_2^{(\lambda)}),\dots\}$$

на E_k. Тогда под пересечением временных отношений R_λ понимается временное отношение

$$\bigcap_{\lambda\in I}R_\lambda=\{(0,\bigcap_{\lambda\in I}\rho_0^{(\lambda)}),(1,\bigcap_{\lambda\in I}\rho_1^{(\lambda)}),(2,\bigcap_{\lambda\in I}\rho_2^{(\lambda)}),\dots\}.$$

Под алгеброй временных отношений над E_k будем понимат м множество временных отношений замкнутое относительно операции (1) – (8). Алгебру конечно-арных временных отношений на множестве E_k будем називать коалгеброй.

Лемма 1. *Если функция с задержкой (f, t) стабилизирует временное отношение R, то она также стабилизирует временные отношения ζR, τR, ΔR и ∇R.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что если функция с задержкой (f, t) погружает пару (p, ρ_p) в пару $(p+t, \rho_{p+t})$, то она также погружает пары $(p, \zeta\rho_p)$, $(p, \tau\rho_p)$, $(p, \Delta\rho_p)$, $(p, \nabla\rho_p)$ в пары $(p+t, \zeta\rho_{p+t})$, $(p+t, \tau\rho_{p+t})$, $(p+t, \Delta\rho_{p+t})$, $(p+t, \nabla\rho_{p+t})$.

Покажем, например, это верно для операции ζ. Пусть $(p, \rho'_p) \in \zeta R$ и

$$M'_n = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdot s\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdot s\alpha_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdot s\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

произвольная ρ'_p-матрица типа $n \cdot BR$ паре (p, ρ'_p) отвечает пара (p, ρ_p) так, что $\zeta\rho_p = \rho'_p$. Соответствующая ρ_p-матрица типа n будет

$$M_n = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdot s\alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \cdot s\alpha_{3n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdot s\alpha_{mn} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdot s\alpha_{1n} \end{bmatrix}.$$

Так как функция с задержкой (f, t) стабилизирует временное отношение R, то существует $(p+t, \rho_{p+t}) \in R$ так, что

$$f = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdot s\alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \cdot s\alpha_{3n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdot s\alpha_{mn} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdot s\alpha_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \beta_1 \end{bmatrix} \in \rho_{p+t}.$$

Отсюда следует, что в ζR существует пара $(p+t, \rho'_{p+t})$ такая, что $\rho'_{p+t} = \zeta\rho_{p+t}$ и

$$f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdot s\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdot s\alpha_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdot s\alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \rho'_{p+t}$$

откуда и следует, что функция с задержкой (f, t) пару (p, ρ'_p) погружает в пару $(p+t, \rho'_{p+t})$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если функция с задержкой (f,t) стабилизирует временные отношения R и S, тогда она стабилизирует и отношение $R*S$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что если функция (f,t) погружает пару (p,ρ_p) и (p,σ_p) в пару $(p+t,\rho_{p+t})$ и $(p+t,\sigma_{p+t})$, тогда она также погружает пару $(p,\rho_p*\sigma_p)$ в пару $(p+t,\rho_{p+t}*\sigma_{p+t})$.

Лемма 3. *Если функция с задержкой (f,t) стабилизирует временные отношения $R_0,R_1,R_2,\dots,R_j,\dots$, то она стабилизирует и временное отношенне R, которое получается при помощи операции сверх-суперпозиции.*

Доказательство. Пусть $R_0,R_1,R_2,\dots,R_j,\dots$ последовательность временных отношений $(*)$ (смотр. опред. опер. (6)) и пусть R их сверх-суперпозиция. Пусть $(j,\rho_0^{(j)})\in R$, тогда $(0,\rho_0^{(j)})\in R_j$. Так как функция с задержкой (f,t) стабилизирует временное отношение R_j, то в R_j существует пара $(t,\rho_t^{(j)})$, такая, что (f,t) погружает пару $(0,\rho_0^{(j)})$ в пару $(t,\rho_t^{(j)})$. В R существует пара $(t+j,\rho_0^{(t+j)})$ такая, что $\rho_t^{(j)}\subseteq\rho_0^{(t+j)}$. Это значит, что функция (f,t) пару $(j,\rho_0^{(j)})$ погружает в пару $(t+j,\rho_0^{(t+j)})$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если функция с задержкой (f,t) стабилизирует временное отношение R, то она стабилизирует и отношение R_{sn_0} $(n_0=0,1,2,\dots)$, которое получается при помощи операции сдвига.*

Лемма 5. *Если функция с задержкой (f,t) стабилизирует времанные отношения $\{R_\lambda\}_{\lambda\in I}$, то она стабилизирует и их пересечение $\bigcap_{\lambda\in I}R_\lambda$.*

Все операции над отношениями определенные в [4] и [5] можно определить и над временными отношениями.

1. Переименования (или перестановки) координат (или строк). Пусть

$$R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$$

m-арное временное отношение на E_k и s подстановка на множестве номеров $\{1,2,\dots,m\}$

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdot s & m\\ j_1 & j_2 & \cdot s & j_m\end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что m-арное отношение $s(R)=\{(0,s(\rho_0)),(1,s(\rho_1)),(2,s(\rho_2)),\dots\}$, где для каждого $i\in N_1$ $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)\in s(\rho_i)\Leftrightarrow(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_m})\in\rho_i$, получается из R переименованием координат.

В частности, если

$$s_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdot s & m-1 & m\\ 2 & 1 & 4 & \cdot s & m & 1\end{pmatrix},\qquad s_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdot s & m\\ 2 & 1 & 3 & \cdot s & m\end{pmatrix}$$

то мы получаем операции ζ и τ которые фигурируют в определении коалгебры временных отношений. Все переименования выражаются через них.

2. Отождествления координат. Пусть $R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$ m-арное временное отношение и $\{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, где $j_1 < j_2 < \cdot s < j_s$. Тогда $(m - s + 1)$-арное отношение $\Delta j_1, j_2, \dots, j_s\ R = \{(0, \Delta j_1, j_2, \dots, j_s \rho_0),\ (1, \Delta j_1, j_2, \dots, j_s \rho_1), \dots\}$ получается из R отождествлением координат, где для всех $i \in N_1$ отношение $\Delta j_1, j_2, \dots, j_s \rho_i$ непусто и состоит из всех таких точек отношения ρ_i, координаты которых с номерами $j_1, j_2, \dots, j_s$ равны между собой, вычеркиванием координат с номерами $j_2, j_3, \dots, j_s$. Заметим, что возможен случай $\Delta j_1, j_2, \dots, j_s R = \emptyset$, когда $\Delta j_1, j_2, \dots, j_s = \emptyset$ для всех $i \in N_1$.

Если $s = 2,\ j_1 = 1,\ j_2 = 2$, получаем операцию Δ, которая входит в определение коалгебры. Все операции отождествления выражаются через Δ и через переименования координат.

3. Приписывание фиктивной переменой (∇) – уже определено.

4. Свертка. Пусть R и T два временных отношений арности m и p и s_1, s_2 подстановки

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot s & i-1 & i & i+1 & \cdot s & m \\ 1 & 2 & \cdot s & i-1 & m & i & \cdot s & m-1 \end{pmatrix},$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot s & j-1 & j & j+1 & \cdot s & p \\ 2 & 3 & \cdot s & j & 1 & j+1 & \cdot s & p \end{pmatrix}.$$

Под сверткой отношений R и T по i-ой и j-ой координатам, где $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p$, понимаем отношение $R^0_{i,j}T$ арности $m+p-2$, которое следующим образом выражается через введеную операцию (5) $*$:

$$R^0_{i,j}T = s_1(R) * s_2(T).$$

Очевидно, суперпозиция $*$ является частным случаем свертки $(i = m,\ j = 1)$. Все свертки выражаются через суперпозицию и переименование координат.

5. Проекции или вычеркивания строк. Пусть

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$$

m-арное временное отношение на E_k и $\{j_1, j_2, \dots, j_j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, тогда под $\operatorname{pr} R$ понимаем l-арное отношение

$$\operatorname{pr} R = \{(0, \operatorname{pr} \rho_0), (1, \operatorname{pr} \rho_1), (2, \operatorname{pr} \rho_2), \dots\}$$

где, дља каждого $i \in N_1$, $\operatorname{pr} \rho_i$ получается из ρ_i проекцией на координаты с номерами $j_1, j_2, \dots, j_l$. Эта операция соответствует вычеркиванию в матрицах отношений ρ_i строк с номерами, отличными от $j_1, j_2, \dots, j_l$.

Вычеркивание i-ой строки из R можно получить с помощью свертки $R^0_{i,i}R$ и соответствующих отождествлений.

6. Декартово произведение. Пусть

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$$

и

$$S = \{(0,\sigma_0),(1,\sigma_1),(2,\sigma_2),\dots\}$$

два временных отношения арностей m и p. Их декартово произведение $R\times S$ – это отношение арности $m+p$

$$R\times S = \{(0,\rho_0\times\sigma_0),(1,\rho_1\times\sigma_1),(2,\rho_2\times\sigma_2),\dots\}$$

где для каждого $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p)\in\rho_i\times\sigma_i \leftrightarrow ((\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)\in\rho_i \\ \wedge(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_p)\in\sigma_i).$$

Декартово произведение выражается через операцию ∇ и свертку.

7. Приписывание строк. Будем говорить, что временное отношение арности $m+1$

$$R^{(p)} = \{(0,\rho_0^{(p)},(1,\rho_1^{(p)}),(2,\rho_2^{(p)},\dots\}$$

получается из

$$R = \{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$$

приписыванием p-ой строки если для каждого $i\in N_1$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p,\dots,\alpha_m,\alpha_p)\in\rho_i^{(p)}\leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p,\dots,\alpha_m)\in\rho_i.$$

Приписывание p-ой строки выражается через свертку с тернарной диагональю $D=\{(0,\Delta),(1,\Delta),(2,\Delta),\dots\}$ по p-ой и первой координатам и переименованием координат.

8. Диагонализация. Пусть $R=\{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$ m-арное временное отношение на E_k и $\sim$ некоторая эквивалентность на $\{1,2,\dots,m\}$. Будем говорить, что m-арное отношение $\sim R=\{(0,\sim\rho_0),(1,\sim\rho_1),(2,\sim\rho_2),\dots\}$ получается из R с помощью диагонализации, если для каждого $i\in N_1$, $\sim\rho_i$ непусто и

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)\in\sim\rho_i\leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\in\rho_i\&(\forall i,j)(i\sim j\to\alpha_i=\alpha_j)).$$

Диагонализация выражается через операции отождествления, приписывания строк и переименования координать.

9. Пересечение-уже определено. Если пресечение конечно, то операция пересечения через операции декартова произведения и отождествления координат.

Пересечение-частичная операция. Однако ее можно распространить и на любые пары отношений R и S. Пусть R и S временные отношения арности m и p соответственно и $m<p$. Тогда можно положить $R\cap S=(R\times E_k^{p-m})\cap S$.

Легко показать, что если применить операции (1) – (9) к инвариантам некоторой функции, то снова получим инварианты этой же функции.

Пусть $\mathfrak{A}$ некоторая алгебра функций с задержками и Z множество всех задержек функций из $\mathfrak{A}$

Определение 1. Под n-ым временным графиком алгебры $\mathfrak{A}$ будем понимать множество пар

$$G_n(\mathfrak{A}) = \{(0, G_n^{(0)}), (1, G_n^{(1)}), (2, G_n^{(2)}), \dots ,\}$$

где $G_n^{(p)}$ n-график функций месности n с задержками p алгебры $\mathfrak{A}$.

Если $p \notin Z$, то $G_n^{(p)}$ пусто. Напомним, что $G_n^{(p)}$ записывается в виде матрицы с вертикальной четрой, отделяющей n-абсциссу от n-ординаты, т.е.

$$G_n^{(p)} = (A_n^{(p)} \mid O_n^{(p)}).$$

Ясно $A_n^{(0)} = A_n^{(1)} = A_n^{(2)} = \cdot s$. Можно считать, что матрица $G_n^{(p)}$ задает k^n-арное отношение; оно равно $O_n^{(p)}$. Отметим, что если $p = 0$, то матрица $0_n^{(0)}$ содержит все столбцы абсциссы, так как мы рассматриваем только алгебры содержащие все селекторы с нулевыми задержками. Например, если $\mathfrak{A}$ максимальний класс $H' = \{(f, 0) \mid f \in S\} \cup \{(\varphi, q+1) \mid q = 0, 1, 2, \dots\}$ на $E_2 = \{0, 1\}$, то для $n = 1$, имеем

$$G_1^{(0)} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \qquad G_1^{(p)} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{для } p = 1, 2, 3, \dots$$

Докажем леммы относящиеся к свойствам временных графиков алгебры функций с задержками.

Лемма 6. *Для каждого* $n = 1, 2, 3, \dots, G_n(\mathfrak{A})$ *является* n*-арным временным отношением.*

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *алгебра функций с задержками. Тогда* n*-ый временный график алгебры* $\mathfrak{A}$ *инвариантен для* $\mathfrak{A}$*, для каждого* $n = 1, 2, 3, \dots$.

Доказательство. Пусть $((f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ произвольная n-местная функция с задержкой из $\mathfrak{A}$ и $s_1, s_2, \dots, s_l$ последовательность точек из $G_n^{(q)}$, т.е. из $O_n^{(q)}$, $q = 0, 1, 2, 3, \dots$. Пусть $(g_1, q), (g_2, q), \dots, (g_l, q)$ n-местные функции с задержкой q, ординаты которых равны $s_1, s_2, \dots, s_l$. Положим $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_l(x_1, x_2, \dots, x_n))$. Так как функции с задержками (f, t), (g_i, q) $(i = 1, 2, \dots, l)$ принадлежат алгебре, то и функция $(h(x_1, x_2, \dots, x_n)q + t)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. С другой стороны, ордината функции $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна $f(s_1, s_2, \dots, s_l)$, откуда и следует, что $f(s_1, s_2, \dots, s_l) \in G_n^{(q+t)}$. Это значит, что функция с задержкой (f, t) погружает пару $(q, G_n^{(q)})$ в пару $(q + t, G_n^{(q+t)})$. Лемма доказана.

Лемма 8. n*-местная функция с задержкой* $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ *тогда и только могда принадлежит алгебре* $\mathfrak{A}$*, если она стабилизурует* n*-ый график* G_n $(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Если $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t) \in \mathfrak{A}$, то в силу предыдущей леммы, (f, t) стабилизирует $G_n\ (\mathfrak{A})$.

Пусть функция $(f(x, x_2, \ldots, x_n), t)$ стабилизирует отношение $G_n(A)$; тогда, в часности, она погружает пару $(0, G_n^{(0)})$ в пару $(t, G_n^{(t)})$, т.е. $f(G_n^{(0)}, G_n^{(0)}, \ldots, G_n^{(0)}) \subseteq G_n^{(t)}$.

В частности, ордината

$$f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_n) = \begin{bmatrix} f(\tilde{\alpha}_1) \\ f(\tilde{\alpha}_2) \\ \vdots \\ f(\tilde{\alpha}_{k^n}) \end{bmatrix}$$

где $\tilde{\alpha}_i (i = 1, 2, \ldots, k^n)$ строки, а $\hat{\beta}_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ столбцы абсцисы $A_n^{(0)}$, принадлежит графику $G_n^{(t)}$. Но,

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{\alpha}_1) \\ f(\tilde{\alpha}_2) \\ \vdots \\ f(\tilde{\alpha}_{k^n}) \end{bmatrix}$$

является ординатой n-местной функции f. Следовательно $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t) \in \mathfrak{A}$. Лемма доказана.

Переходим к доказателству первой основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ алгебра функций с задержками над конечным множеством E_k и $\mathcal{J}\ (\mathfrak{A})$ множество всех инвариантов для $\mathfrak{A}$. Тогда всякая функция с задержкой $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ стабилизирующая $\mathcal{J}\ (\mathfrak{A})$, принадлежим $\mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathcal{J}(\mathfrak{A}))$.*

Доказательство. Согласно лемме 7, $\mathcal{J}(\mathfrak{A})$ содержит все графики $G_n(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$ некоторая n-местная функция с задержкой, стабилизирующая $\mathcal{J}\ (\mathfrak{A})$. Тогда она, в частности, стабилизирует n-ый график $G_n\ (\mathfrak{A})$, и согласно лемме 8, она принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. Отсюда следует $\mathfrak{A} = P(\mathcal{J}(\mathfrak{A}))$, что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Всякая алгебра $\mathfrak{A}$ функций с задержками является пересечением некоторой убывающей последовательности алгебр функций с задержками т.е. $\mathfrak{A} = \cap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \cdot s$ и для каждого i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ алгебра $\mathfrak{A}_i$ определяется как алгебра, стабилизирующая одно единственное временное отношение.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ алгебра функций с задержками. Положим $\mathfrak{A}_i = \mathcal{P}(G_i(\mathfrak{A}))$. т.е. $\mathfrak{A}_i$ множество всех функций с задержками, кототые стабилизируют n график $G_i(\mathfrak{A}_i)$. В силу леммы 7 имеем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_i$ а в силу леммы 9 $G_i(\mathfrak{A}_i) = G(\mathfrak{A}_i)$. Огсюда следуеть, что $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_j$ для $i \geq j$ и $\mathfrak{A} = \cap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{A}$ некоторая алгебра функций с задержками и $R = \{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$ временное отношемие ширины n, инвариантное для $\mathfrak{A}$. Тогда R получается из n-графика $G_n(\mathfrak{A})$ операциями проекции, переименования и сверх-супернозиции.*

Доказательство. Пусть $M^{(0)} = \{(0,M_0),(1,M_1),(2,M_2),\dots\}$ врменная R-матрица, где M_i ρ_i-матрица $(i = 0,1,2,\dots)$. Переставим строки в $M_i(i = 0,1,2,\dots)$, чтобы они в M_0 следовали друг за другом в лексикографическом порядке. В результате получатюся матрицы $M_i'(i = 0,1,2,\dots)$. Вообще говоря, M_i' не будет ρ_i-матрицей, а будет ρ_i'-матрицей, где ρ_i' отношение, которое получается из ρ_i той же перестановкой строк, которая перевела M_i в $M_i'(i = 0,1,2,3,\dots)$. Таким образом получается временное отношение

$$R' = \{(0,\rho_0'),(1,\rho_1'),(2,\rho_2'),\dots\}.$$

Пусть $G_n(\mathfrak{A}) = \{(0,G_n^{(0)}),(1,G_n^{(1)}),(2,G_n^{(2)}),\dots\}$ n-ый временный график алгебры $\mathfrak{A}$, где $G_n^{(p)} = (A_n^{(p)} \mid O_n^{(p)})$ $(p = 0,1,2,\dots)$. Очевидно, M_0' подматрица матрицы $A_n^{(p)}(p = 0,1,2,\dots)$. Так как по предположению отношение R, а значит и R' инвариантно для $\mathfrak{A}$, то если в $G_n(\mathfrak{A})$ т.е. в $G_n^{(p)}(p = 0,1,2,\dots)$, вычеркнуть все строки, номера которых отличны от веса каждой строки матрицы M_0', тогда $\mathrm{pr}\, A_n^{(p)} = M_0'$, а $\mathrm{pr}\, O_n^{(p)}$ будет подматрица матрицы $M_p'(p = 1,2,\dots)$. В частности $\mathrm{pr}\, O_n^{(p)} = M_0'$. Положим $O_n^{(p)} = M_p^{'(0)}$ матрица отношения $\rho_p^{'(0)}(p = 0,1,2,\dots)$. Получаем временное отношение $R_0' = \{(0,\rho_0^{'(0)}),(1,\rho_1^{'(0)}),(2,\rho_2^{'(0)}),\dots\}$ где $\rho_0^{'(0)} = \rho_0', \rho_p^{'(0)} \subseteq \rho_p'(p = 1,2,3,\dots)$. При помощи операции перестановки получаем временное отношение $R_0 = \{(0,\rho_0^{(0)}),(1,\rho_1^{(0)}),(2,\rho_2^{(0)}),\dots\}$ где $\rho_0^{(0)} = \rho_0, \rho_p^{(0)} \subseteq \rho_p(p = 1,2,3,\dots)$. Положим $M^{(p)} = \{(0,M_p),(1,M_{p+1}),(2,M_{p+2}),\dots\}(p = 1,2,3,\dots)$. Тем же способом получется отношение $R_p = \{(0,\rho_p^{(1)}),(1,\rho_{p+1}^{(p)}),(2,\rho_{p+2}^{(p)}),\dots\}$ где $\rho_p^{(p)} = \rho_p, \rho_{p+i}^{(p)} \subseteq \rho_{p+i}(i = 1,2,3,\dots; p = 1,2,3,\dots)$. Очевидно, отношение R является сверх-суперпозицией отношения $R_0, R_1, R_2, \dots$. Это значит, что из $G_n(\mathfrak{A})$ получается отношение R с помощью операций перестановки, проекции и сверх-суперпозиции.

Теорема 2. *Пусть C коалгебра временных отношений над конечним множеством E_k и $P(C)$ множество всех ее полиморфизмов. Тогда каждое временное отношение, инвариантное для $\mathfrak{A} = P(C)$, принадлежит C, т.е. $C = I(P(C))$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1. коалгебра – конечно-порожденная и 2. коалгебра – бесконечно-порожденная.

1. случай. Пусть C конечно-порожденная коалгебра. Это значит, что существует конечное множество временных отношений $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ и даже существует только одно временное отношение R, порождающее

коалгебру C. Ясно, что $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(R)$. Пусть R' временное отношение усмойчиво для $\mathcal{P}(C)$, т.е. $R' \in \mathcal{J}(\mathcal{P}(R))$. Надо показать, что $R' \in C$. Мы должны показать, что R' можно получить из R с помощью операций над отношениями. Так как в силу леммы 10 отношение R' получается из n-графика $G_n(\mathfrak{A})$, то достаточно будеть показать, что n-график $G_n(\mathfrak{A})$ может быть получен из отношения R применением этих же операций.

Пусть $R = \{(0,\rho_0),(1,\rho_1),(2,\rho_2),\dots\}$ временное отношение арности m. Мы хотим построить все n-местные функции с задержками сохраняющие R.

Пусть M_0 некоторая ρ_0-матрица типа n. Из условова стабилирования следует, что функция с задержкой нуль должна отображатаь матрицу M_0 на одну из точек из ρ_0, функция с задержкой один на одну из точек из ρ_1, функция с задержкой два на одну из точек из ρ_2 итд. Пусть отношение ρ_0 ширины s и пусть $M_0^{(1)}, M_0^{(2)}, \dots, M_0^{(l)}$ $(l = s^n)$ всевозможные ρ_0-матрицы типа n.

Положим

$$P = \begin{pmatrix} M_0^{(1)} \\ M_0^{(2)} \\ \vdots \\ M_0^{(l)} \end{pmatrix}$$

где P матрица с n столбцами и $d = ml$ строками. Обозначим через $Q_p l$-ыю декартову степень отношения ρ_p $(p = 0,1,2,\dots)$. Таким образом получаем временное отношение арности $d = ml$:

$$G_n^I(\mathfrak{A}) = \{(0,(P \mid Q_0)),(1,(P \mid Q_1)),(2,(P \mid Q_2)),\dots\}$$

которое получается из R применением операции декартого умножения.

На множестве $\{1,2,\dots,d\}$ вводим эквивалентность следующим способом: $i \sim j$, если i-я и j-я строки матрицы P равны между собой. Произведем дигонализацию в $Q_p (p = 0,1,2,\dots)$ относительно отношения эквивалентности $\sim$. Получаем временное отношение

$$G_n^{II}(\mathfrak{A}) = \{(0,(P \mid\sim Q_0)),\ (1,(P \mid\sim Q_1)),\ (2,(P \mid\sim Q_2)),\dots\}.$$

Подчеркнем, что отношение $\sim Q_p$ было получено из отношения Q_p диагонализацией.

Из каждой совокупности всех равных между собой строк в $\sim Q_p$ вычеркнем все строки, кроме первой. Проделаем это также в матрице P. Таким образом получаем временное отношение арности $b < d$

$$G_n^{III}(\mathfrak{A}) = \{(0,(\mathrm{pr}\,P \mid \mathrm{pr}\,(\sim Q))),(1,(\mathrm{pr}\,P \mid \mathrm{pr}\,(\sim Q_1))),\dots\}.$$

$G_n^{III}(\mathfrak{A})$ уже определяет все n-местные функции с задержками которые стабилизируют ρ_0, погружают ρ_0 в ρ_1, погружают ρ_0 в $\rho_2 \dots$ погружают ρ_0

в ρ_p на всех ρ_0-допуствивых наборах; на остальных наборах значение таких функций произвольно. Заметим, что $G_n^{III}(\mathfrak{A})$ было получено из $G_n^{II}(\mathfrak{A})$ применением проекции.

Припишем матрице $\mathrm{pr}\, P$ все не ρ_0-допустимые наборы местности n. Одновременно умножим отношение $\mathrm{pr}\,(\sim Q_p)$ на полное отношение арности $k^n - b$. Полученное временное отношение обозначим через $G_n^{IV}(\mathfrak{A})$.

Произведем переименования строк в $G_n^{IV}(\mathfrak{A})$, упорядочивая строки абсцисы в лексикографическом порядке, (одновременно переставим строки в ординатах). Получим временное отношение

$$G_n^{(0)}(\mathfrak{A}) = \{(0, G_n^{(0,0)}), (1, G_n^{(0,1)}), (2, G_n^{(0,2)}), \dots\}$$

$G_n^{(0,0)}$ определяет все n-местные функции алгебры $\mathfrak{A}$ с нулевыми задержками стабилизирующие $\rho_0, G_n^{(0,1)}$ все функции с задержкой один погружающие ρ_0 в $\rho_1, G_n^{(0,2)}$ все функции с задержкой два погружающие ρ_0 в ρ_2 итд.

Пусть теперь

$$R_{s_q} = \{(0, \rho_q), (1, \rho_{q+1}), (2, \rho_{q+2}), \dots\} \ \ (q = 1, 2, 3, \dots)$$

временное отношение, которое получается из R операцией сдвига (R_{s_q})-инвариантое для $\mathfrak{A}$) и если в предыдущем алгоритме заменим ρ_0 на ρ_q, ρ_1 на ρ_{q+1}, ρ_2 на ρ_{q+2} итд, то получаем n-ый временный график

$$G_n^{(q)}(\mathfrak{A}) = \{(0, G_n^{q,0}), (1, G_n^{q,1}), (2, G_n^{q,2}), \dots\} \ \ (q = 1, 2, 3, \dots),$$

где $G_n^{q,0}$ определяет все функции алгебры $\mathfrak{A}$ с нулевыми задержками стабилизирующие ρ_q, $G_n^{q,1}$ все функции алгебры $\mathfrak{A}$ с задержкой один погружающие ρ_q в ρ_{q+1}, $G_n^{q,2}$ все функции алгебры $\mathfrak{A}$ с задержкой два погружающие ρ_q в ρ_{q+2} итд.

Очевидно, $G_n(\mathfrak{A}) = \{(0, G_n^{(0)}), (1, G_n^{(1)}), (2, G_n^{(2)}), \dots\}$ где $G_n^{(p)} = G_n^{(0,p)} \cap G_n^{(1,p)} \cap G_n^{(2,p)} \cap \cdot s$ $(p = 0, 1, 2, \dots)$.

Для случая конечнопорожденных коалгебр теорема доказана.

2. случай. Пусть C-бесконечно-порожденная (либо счетно-порожденная, либо континуально-порожденная) алгебра. Пусть она порождается множеством $\{R_i \mid i \in I\}$ временных отношений.

Тогда $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(C) = \cap_{i \in I} \mathcal{P}(R_i)$. ВВедем обозначение $\mathfrak{A}_i = \mathcal{P}(R_i)$, тогда $\mathfrak{A} = \cap_i \mathfrak{A}_i$. Обозначим также через C_i коалгебру, порожденную одним отношением R_i. Очевидно $C_i \subseteq C$. Из доказательства для случая конечнопорожденных коалгебр следует, что $G_n(\mathfrak{A}_i) = C_i$. Следовательно, $\forall i (i \in I)$

$$G_n(\mathfrak{A}_i) \in C. \tag{1}$$

Имеем также

$$G_n(\mathfrak{A}) = \cap_{i \in I} G_n(\mathfrak{A}_i) \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем $G_n(\mathfrak{A}) \in C$.

Ссылка на доказанную лемму 7, так же как и в случае 1, заканчивает доказательство теоремы и в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л.А. Бирюкова, В.Б. Кудрявцев, *О полноте функций с задержками*, Проблемы кибернетики, **23** (1970), 5–25.

[2] Л.А. Бирюкова, *Вопросы l-полноты для функций с задержками*, Проблемы кибернетики, **31** (1976), 53–77.

[3] Л.А. Бирюкова, В.Б. Кудрявцев, *Некоторые задачи о полноте для функций с задержками*, Исследование операций, **4** (1974), 88–102.

[4] В.Г. Боднарчук, Л.А. Калужнин, В.Н. Котов, Б.А. Ромов, *Теореия Галуа для алгебр Поста, I* Кибернетика, 3, Киев, 1969.

[5] В.Г. Боднарчук, Л.А. Калужнин, В.Н. Котов, Б.А. Ромов, *Теореия Галуа для алгебр Поста, II* Кибернетика, 5, Киев, 1969.

[6] С.В. Яблонский, *Функционалные построения в k-значной логике*, Труды инст. Стеклова, **51** (1958).

[7] С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев, *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966.

[8] В.Б. Кудрявцев, *Теорема для одного класса автоматов без обратных связей*, Проблемы кибернетики, **8** (1962), 91–115.

[9] А.И. Мальцев, *Итеративные алгебры и многообразия Поста*, Алгебра и логика, 5, вып. 2 (1966), Новосибирск, 5–24.

[10] A. Nozaki, *Réalisation des fonctions définies dans un ensemble fini à l'aide des organes élémentaires d'entré-sortie*, Proc. Japan Acad. **46** (1970), 478–482.

[11] T. Hikita and A. Nozaki, *A completness criterion for spectra.* SIAM J. Comput. **6** (1977), 285–297.

[12] T. Hikita, *Completness criterion for functions with delay defined over a domain of three elements*, Proc. Japan Acad. **54** (1978).

Rudarsko-geoloxki fakultet
11000 Beograd
Σuxina 7

(Поступила 10 06 1983)