

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. М. Лаврентьев, Р. Щечпанович

Резюме. В данной статье рассматривается вопрос разрешимости нелинейных уравнений типа Гаммерштейна в гильбертовых пространствах.

Пусть H вещественное гильбертово пространство, F нелинейный оператор из H в H и S линейный ограниченный оператор действующий в H .
Уравнение

$$(1) \quad x + SF(x) = 0$$

называется уравнением типа Гаммерштейна. В данной статье при изучении уравнения (1) использован вариационный метод. При этом мы отказываемся от требования слабой полунепрерывности снизу функционала f , $\text{grad} f = F$ и ограничения на спектр оператора S (см. работы М. М. Вайнберга, Ф. Браудера, Х. Брезиса, В. Петришина).

Пусть $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 и H_2 подпространства H . Условимся писать $z = (x, y)$, если $z = x + y$, $x \in H_1$, $y \in H_2$. Пусть $F : G \rightarrow H$, $G_i = G \cap H_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ и $z_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 \in G_1$, $y_0 \in G_2$.

Определение 1. Отображение $F : H \rightarrow H$ называется монотонным на множестве $\sigma \subset H$, если для любых $x, y \in \sigma$ выполняется неравенство $(F(x) - F(y), x - y) \geq 0$, и строго монотонным, если равенство выполняется лишь при $x = y$.

Определение 2. Мы скажем что оператор F обладает свойством (α) в точке z_0 , если выполнены условия: каковы бы не были последовательности $\{x_n\} \subset G_1$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_0 \in G_1$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $t_n \rightarrow 0$ и вектор $y_0 + \tau k \in G_2$, $0 \leq \tau < \delta$, $F(x_n, y_0 + t_n k) \rightarrow F(x_0, y_0)$, $n \rightarrow +\infty$. Оператор F обладает свойством (α) на множестве G , если он обладает свойством (α) в каждой точке этого множества.

Определение 3. Оператор $F : G \rightarrow H$, $G \subset H$ называется слабо ограниченным на множестве G , если для всякого фиксированного $u \in H$ существует постоянная L_u такая что $|(F(z), U)| \leq L_u$.

Определение 4. Функционал $F(z)$ называется хемиограниченным на множестве G пространства H , если для любых $z, u \in G$ таких что $z+tu \in G$, $0 \leq t \leq 1$ существует постоянная $C > 0$ такая что $|f(z+tu)| \leq C$, $0 \leq t \leq 1$.

Пусть $F(z) = \text{grad } f(z)$. Положим $F_1(z) = P_1(z)$, $F_2(z) = P_2(z)$ где P_1 и P_2 операторы проектирования на подпространства H_1 и H_2 соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия:

- 1) Для любого $y \in H_2$: $F(x+h, y) - f(x, y) - (F_1(x, y), h) \geq \sigma_y(\|h\|)$, $x, y \in H_1$, где функция $\sigma_y(t) > 0$ причем из того что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_y(t_n) \leq 0$ следует $t_n \rightarrow 0$.
- 2) Для каждого $x \in H_1$ функционал $f(x, y)$ слабо полунепрерывен сверху по $y \in H_2$.
- 3) Для каждого $y \in H_2$ существует $D_{R_y}(a_y) \subset H_1$ такое что $(F_1(a_y + h, y), h) > 0$, если $\|h\| \geq R_y$, причем функционал R_y хемиограничен и $D_r(a) = \{x : \|x - a\| \leq r, r > 0, x \in H_1\}$.
- 4) $\sup_{\|x\| \leq R_y} f(x, y) \leq \omega(y)$ где $\omega(y) \rightarrow -\infty$, $\|y\| \rightarrow \infty$.
- 5) Оператор $F_2(x, y)$ обладает свойством (α) в H , причем на каждом ограниченном множестве $G \subset H$ оператор $F_2(x, y)$ слабо ограничен.

Тогда существует $z_0 \in H$ такое что $F(z_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $y \in H_2$ фиксирован. Положим $\varphi(x) = f(x, y)$, $x \in H_1$. Нетрудно видеть что функционал $\varphi(x)$ на подпространстве H_1 слабо полунепрерывен снизу. В силу условия 3) теоремы следует $(\exists \xi(y) \in H_1, \xi(y) \in D_{R_y}(a_y))(\varphi(\xi(y)) \leq \varphi(x)$, если $\|x - a_y\| \geq R_y$). Отсюда следует что $F_1(\xi(y), y) = 0$.

Пусть $\psi(y) = f(\xi(y), y)$, $y \in H_2$. Положим что функционал $\psi(y)$ слабо полунепрерывен сверху на подпространстве H_2 , причем $\psi(y) \rightarrow -\infty$ $\|y\| \rightarrow \infty$. Действительно, пусть $\{y_n\} \subset H_2$, $y_n \rightarrow y_0 \in H_2$. Тогда $\limsup_{n \rightarrow \infty} \psi(y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(\xi(y_0), y_n) \leq f(\xi(y_0), y_0) = \psi(y_0)$. Далее

$$\psi(y) = f(\xi(y), y) \leq \sup_{n \rightarrow \infty} f(x, y) \leq \omega(y).$$

Так как $\omega(y) \rightarrow -\infty$, $\|y\| \rightarrow +\infty$ то $\psi(y) \rightarrow -\infty$, $\|y\| \rightarrow +\infty$. Таким образом утверждение доказано.

Отсюда следует что существует вектор $y_0 \in H_2$, такой что для каждого $y \in H_2$ имеет место неравенство $\psi(y) \leq \psi(y_0)$.

Покажем теперь что для любых $y_0, k \in H_2$ и любой последовательности $t_n \in R$, $t_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, $\xi(y_0 + T_n k) \rightarrow \xi(y_0)$. В самом деле

$$\begin{aligned}
 & \psi(y_0 + t_n k) - \psi(y_0) = f(\xi(y_0 + t_n k)) - f(\xi(y_0), y_0) + \\
 & + f(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + t_n k) - f(\xi(y_0 + t_n k), y_0) = f(\xi(y_0 + t_n k), y_0) - \\
 & - f(\xi(y_0), y_0) - (F_1(\xi(y_0), y_0), \xi(y_0 + t_n k) - \xi(y_0)) + \\
 (2) \quad & + f(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + t_n k) - f(\xi(y_0 + t_n k), y_0) \geq \\
 & \geq \sigma_{y_0}(\|\xi(y_0 + t_n k) - \xi(y_0)\|) + t_N(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k), k), \\
 & \theta_n \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Так как для каждого $n \in N$ $\|\xi(y_0 + t_n k)\| \leq R_{y_0 + t_n k} \leq C$, то в силу условия 5) теоремы существует постоянная L_k такая что $|F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k)| \leq L_k$. Поэтому $t_n(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из (2) получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sigma_{y_0}(\|\xi(y_0 + t_n k) - \xi(y_0)\|) & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\psi(y_0 + t_n k) - \psi(y_0) - \\
 - t_n(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k))) & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (\psi(y_0 + t_n k) - \psi(y_0)) \leq 0,
 \end{aligned}$$

т. е. $\|\xi(y_0 + t_n k) - \xi(y_0)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

Докажем что $F_2(\xi(y_0), y_0) = 0$. Действительно, пусть вектор $k \in H_2$ произвольно фиксирован и $\{t_n\} \subset R$ произвольная последовательность такая что $t_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
 0 & \geq \psi(y_0 + t_n k) - \psi(y_0) = f(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + t_n k) - f(\xi(y_0), y_0) \geq \\
 & \geq f(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + t_n k) - f(\xi(y_0 + t_n k), y_0) = \\
 & t_n(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k), k),
 \end{aligned}$$

или $(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k), k) \leq 0$. Пусть $n \rightarrow \infty$. Тогда $\xi(y_0 + t_n k) \rightarrow \xi(y_0)$, $y_0 + \theta_n t_n k \rightarrow y_0$. Так как отображение F_2 обладает свойством (α) , то $(F_2(\xi(y_0 + t_n k), y_0 + \theta_n t_n k), k) \rightarrow (F_2(\xi(y_0), y_0), k)$, поэтому $(F_2(\xi(y_0), y_0), k) \leq 0$. Отсюда в силу произвольности вектора $k \in H_2$, получаем $F_2(\xi(y_0), y_0) = 0$. Положим $z_0 = \xi(y_0) + y_0$. Так как для любого $z = (x, y)$, $x \in H_1$, $y \in H_2$, $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$, то $F(z_0) = 0$. То теорема доказана.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 заненить условие 3) условием 3'): Для каждого $x \in H_2$ сущеатвует $D_{R_y}(a_y) \subset H_1$ и $x_y \in D_{R_y}(a_y)$ такие что $f(x, y) > f(x_y, y)$ для любого $x \in \partial D_{R_y}(a_y)$, где $\partial D_r(a)$ граница от $D_R(a)$, тогда утверждение теоремы сохраняются.

Пример. Рассмотрим в пространстве R^2 функционал $f(x, y) = x^2 - xy/4 - y^2$. Покажем что этот функционал удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Нетрудно видеть что проверки нуждаются лишь условия 1), 3) и 4). Имеем $f(x+h, y) - f(x, y) - ({}_1(x, y), h) = h^2$, т. е. $\sigma_y(t) = t^2$. Далее, положим $a_y = 0$, $R_y = \begin{cases} |y|/8, & y \neq 0 \\ \delta, & y = 0 (\delta > 0) \end{cases}$, $\xi(y) = 0$. Отсюда следует

$(F - 1)(h, y), h) = 2h^2 - hy/4 = 2(h^2 - hy/8) > 0$, если $|h| > R_y$. Пусть $\omega(y) = 63y^2/64 - y|y|/32$, $y \neq 0$. Тогда $f(x, y) \leq \omega(y)$, для $|x| < |y|/8$. Так как $\omega(y) \rightarrow -\infty$, $|y| \rightarrow +\infty$ то условие 4) теоремы выполнено.

Пусть выполнено условие 3'). Положим $a_y = 0$, $x_y = 0$ и $R_y = \begin{cases} |y|/2, & y \neq 0 \\ \delta, & y = 0 (\delta > 0) \end{cases}$. Проверим что для всякого $x \in \partial D_{R_y}(0)$ $f(x, y) > f(0, y)$. Действительно, $x \in D_{R_y}(0)$ следует $x_1 = |y|/2$ или $x_2 = -|y|/2$, $f(x_1, y) > (f(0, y))$, $y \in R$. Аналогично можно проверить, что $f(x_2, y) > f(0, y)$, $y \in R$.

Замечание 2. Можно показать, что уравнение $F(z) = 0$ имеет единственное решение, если:

- а) Для каждого $x \in H_1$ оператор $-F_2(x, y)$ строго монотонный по $y \in H_2$,
- б) Для каждого $y \in H_2$ оператор $F_1(x, y)$ строго монотонный по $x \in H_1$.

Пусть S линейный ограниченный самосопряженный оператор действующий в пространстве H , причем $\alpha = \inf(Sz, z) < 0$, $\beta = \sup(Sz, z) > 0$, $\|z\| = 1$. Обозначим через E_t разложение единицы оператора S . Тогда $E(\Delta) = E_\beta - E_0 = P_1$ есть оператор ортогонального проектирования из H на инвариантное подпространство $H_1 \subset H$ которое приводит S . Пусть P_2 оператор ортогонального проектирования из H на $H \ominus H_1$. Положим $A = (|S| + S)/2$, $B = (|S| - S)/2$, $T = A^2 - B^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия:

- 1) $f(x + h, y) - f(x, y) - (F(x, y), h) \geq \gamma_y(\|h\|)$, $x, h \in H_1$, $y \in H_2$; $t^2/(2\|A\|^2) + \gamma_y(t) > 0$, если $t > 0$; γ_y непрерывно убывает и $\gamma_y(0) = 0$.
- 2) Для каждого $y \in H_1$ функционал $-\|y\|^2/2 + F(Ax, By)$ слабо непрерывен сверху по $y \in H_2$.
- 3) Для каждого $y \in H_2$ существует $R_y > 0$: $(F_1(Ax, By), Ax) > -\|x\|^2$, если $\|x\| \geq R_y$.
- 4) $\sup_{\|x\| \leq R_y} f(x, By) \leq \omega(y)$, где $R_y^2/2 - \|x\|^2/2 + \omega(y) \rightarrow -\infty$, $\|y\| \rightarrow \infty$.
- 5) Отображение $\Phi_2(y) = -y + BF_2(Ax, By)$ обладает свойством (α) в H , причем на каждом ограниченном множестве $G \subset h$ $\Phi_2(x, y)$ слабо ограничено. Тогда существует $z_0 \in H$ такое что $z_0 + TF(z_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $\varphi(x, y) = \|x\|^2/2 - \|y\|^2 + f(Ax, By)$ $x \in H - 1$, $y \in H_2$. Для каждого $y \in H_2$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) - (x + AF_1(Ax, By), h) &= \|h\|^2/2 + f(Ax + Ah, By) - \\ &- f(Ax, By) - (F_1(Ax, By), Ah) \geq \|h\|^2/2 + \gamma_y(\|Ah\|) \geq \|h\|^2/2 + \gamma_y(\|A\| \cdot \|h\|). \end{aligned}$$

Положим $\sigma_y(t) = t^2/(2\|A\|^2) + \gamma_y(t)$. Тогда функция $\sigma_y(t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1.

Пусть $\Phi_1(x, y) = x + AF_1(Ax, By)$. Имеем: Для каждого $y \in H_2$ существует $R_y > 0$, такое что $(\Phi_1(x, y), x) = \|x\|^2/2 + (F_1(Ax, By), Ax) > 0$, если

$\|x\| \geq R_y$. Далее

$$\sup_{\|x\| \leq R_y} \varphi(x, y) = \sup_{\|x\| \leq R_y} \{ \|x\|^2/2 - \|y\|^2/2 + f(Ax, By) \} \leq (R_y^2 - \|y\|^2)/2 + \omega(y).$$

Так как $R_y^2/2 - \|y\|^2/2 + \omega(y) \rightarrow \infty$, $\|y\| \rightarrow +\infty$, то $\sup_{\|x\| \leq R_y} \varphi(x, y) \rightarrow -\infty$, $\|y\| \rightarrow +\infty$.

Мы показали что выполнены все условия теоремы 1. Следовательно существует: $(x_0, y_0) \in H : x_0 + AF_1(Ax_0, By_0) = 0$, $-y_0 + BF_2(Ax_0, By_0) = 0$. Применяя к данным уравнениям оператор $A - B$ получим $Ax_0 + A^2F_1(Ax_0, By_0) = 0$, $by_0 - B^2F_2(Ax_0, By_0) = 0$. Отсюда следует $Ax_0 + By_0 + (A^2 - B^2)F(Ax_0, By_0) = 0$. Полагая $z_0 = Ax_0 + by_0$, получим $z_0 + TF(z_0) = 0$, Теорема доказана.

Замечание 3. Условие 2) теоремы 2 можно заменить условием $(\forall x \in H_1)((F_2(Ax, By_1) - F_2(Ax, By_2), By_1 - By_2) \leq \|y_1 - y_2\|^2, y_1, y_2 \in H_2)$. Покажем что оператор $\Phi_2(x, y) = y - BF_2(Ax, By)$ монотонный по y . Действительно,

$$\begin{aligned} & (\forall x \in H_1)(\forall y_1, y_2 \in H_2)((\Phi_2(x, y_1) - \Phi_2(x, y_2), y_1 - y_2) = \\ & = \|y_1 - y_2\|^2 - (F_2(Ax, By_1) - F_2(Ax, By_2), By_1 - By_2) \geq 0). \end{aligned}$$

Так как оператор $\Phi_2(x, y)$ – монотонный, то функционал $-\|y\|^2/2 + f(Ax, By)$ слабо полунепрерывен сверху по y .

Замечание 4. В условии 2) теоремы 2 мы требовали слабую полунепрерывность сверху функционала $-\|y\|^2/2 + f(Ax, By)$ по y . Это будет, например, в следующем случае: а) Функционал $\|y\|^2/2 + f(y)$ слабополунепрерывен сверху по $y \in H_2$. б) Часть отрицательного спектра оператора B лежащая левее -1 , состоит из конечного числа собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность.

Действительно, пусть $y_n \rightarrow y_0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$-\|y\|^2 + f(Ax, By_n) = -\|Ax + By_n\|^2/2 + f(Ax, By_n) - \|y\|^2/2 + \|Ax + By_n\|^2/2.$$

Так как $Ax + By_n \rightharpoonup Ax + By_0$, $n \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(-\|Ax + By_n\|^2 + f(Ax, By_n)) \leq -\|Ax, By_0\|^2/2 + f(Ax, By_0).$$

Далее, положим $y_n = y_0 + h_n$, $h_n \rightarrow 0$. Следует

$$\begin{aligned} -\|y_n\|^2/2 + \|Ax + By_n\|^2 &= -\|y_0 + h_n\|^2/2 + \|Ax + By_0 + Bh_n\|^2/2 = \\ &= -\|y_0\|^2/2 - (y_0, h_n) - \|h_n\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 + \\ &+ (Ax + By_0, Bh_n) + \|Bh_n\|^2/2 = \\ &= -\|y_0\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 - (y_0, h_n) + \\ &+ (Ax + By_0, Bh_n) + 1/2 \cdot (-\|h_n\|^2 + \|Bh_n\|^2). \end{aligned}$$

Так как $(y_0, h_n) \rightarrow 0$, $(Ax + By_0, Bh_n) \rightarrow 0$; $B = B_{(-\infty, -1)} \oplus B_{[-1, 0]}$, то

$$Bh_n = B_{(-\infty, -1)}h_n + B_{[-1, 0]}h_n, \quad \|Bh_n\|^2 = \|B_{(-\infty, -1)}h_n\|^2 + \|B_{[-1, 0]}h_n\|^2.$$

Так как $\|B_{[-1, 0]}h_n\|^2 \leq \|h_n\|^2$ и $\|B_{(-\infty, -1)}h_n\|^2 \rightarrow 0$, то $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-\|h_n\|^2 + \|BH_n\|^2) \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (-\|h_n\|^2/2 + f(Ax, By_n)) &\leq -\|Ax + By_0\|^2/2 + f(Ax, By_0) - \\ &\quad -\|y_0\|^2/2 + \|Ax + By_0\|^2/2 = -\|y_0\|^2/2 + f(Ax, By_0). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М.М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, Москва, 1972.
- [2] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и нелинейные уравнения*, Мат. Балканика, **9** (1979).
- [3] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и уравнения типа Гаммерштейна*, Мат. Балканика, **9** (1979).
- [4] R. Šćerpanović, *Varijacioni metod i nepokretne tačke*, Mat. Vesnik, **4(17)(32)** (1980), 251–254.
- [5] R. Šćerpanović, *O minimumu nekih funkcionala*, Mat. Vesnik, **4(18)(33)** (1981), 115–118.

МГУ, Механико-математический факультет
кафедра математического анализа
Москва

Универзитет „Вељко Влаховић“
Институт за математику и физику
Титоград

(Поступила 24 02 1983)