

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ  
 $B(p, \theta, k, \alpha)$ -КЛАССАМ ТИПА БЕСОВА

М. Бериша

**Введение.** В работе [1] определены необходимые и достаточные условия ( в терминах коэффициентов Фурье) при которых чётные функции с монотонными коэффициентами Фурье принадлежат классам типа Бесова.

В настоящей работе находим необходимые условия, которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы в общем случае функция,

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu x} \quad \text{где } c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt$$

принадлежала классу  $B(p, \theta, k, \alpha)$ .

1. Будем писать,  $f(x) \in L_p$  если  $f(x)$  есть  $2\pi$ -периодическая функция, которая

1) при  $1 \leq p < \infty$  измерима и  $\|f\|_p = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$ ,

2) при  $p = \infty$  непрерывна и  $\|f\|_{\infty} = \|f\|_C = \max_x |f(x)|$ .

Через  $\omega_k(f, t)_p$  обозначим модуль гладкости в метрике  $L_p$  порядка  $k$ , где  $k$  натуральное число, функций  $f(x)$ , т. е.

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f(x)\|_p \quad \text{где } \Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h).$$

Ряд Фурье функции  $f(x)$  обычно будем записывать в комплексной форме, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{|n|=0}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu x} \quad \text{где } c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы в которых все ряды шодятся.

ЛЕММА 1. Пусть  $f(x) \in L_p$  для фиксированного  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , справедливы неравенства:

1. для  $p$  из промежутка  $2 \leq p \leq \infty$ :

$$\omega_k(f, 1/n)_p \geq A_1 \left\{ \frac{1}{n^k} \left( \sum_{|\nu|=1}^n |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{1/2} + \left( \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \right\},$$

2. для  $p$  из промежутка  $1 < p \leq 2$ :

$$\omega_k(f, 1/n)_p \geq A_2 \left\{ \frac{1}{n^k} \left( \sum_{|\nu|=1}^n |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2} \right)^{1/p} + \left( \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{1/p} \right\},$$

3. для  $p = 1$   $\omega_k(f, 1/n)_1 = A_3 |c_n|$  где константы  $A_1, A_2, A_3$  не зависят от  $f(x)$  и  $n$ .

Отметим что из условий леммы 1 следует

$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} < \infty$$

(см. [2, §I, т. 5 и т. 12]).

Доказательство леммы 1 содержится в работе [3]; заметим, что случай  $p = 1$  хорошо известен (см. например [4, стр. 79]).

ЛЕММА 2. Пусть числа  $\alpha, \beta$  и  $a_\nu$  таковы, что  $a_\nu \geq 0$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ , тогда справедливо неравенство:

$$\left( \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta \right)^{1/\beta} \leq \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [5], (см. [5, т. 19, стр. 43]).

ЛЕММА 3. Пусть числа  $a_\nu, b_\nu, \gamma_\nu$  таковы, что  $a_\nu \geq 0, b_\nu \geq 0$  и  $\sum_{\nu=1}^n a_\nu = a_n \gamma_n$ , тогда для  $p$  из промежутка  $0 < p \leq 1$  справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left( \sum_{n=\nu}^{\infty} b_n \right)^p \geq p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n \gamma_n)^p.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [6].

ЛЕММА 4. Пусть числа  $a_\nu, b_\nu, \beta_\nu$  таковы, что  $a_\nu \geq 0, b_\nu \geq 0$  и  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_n \beta_n$ , тогда для  $p$  из промежутка  $0 < p \leq 1$  справедливо неравенство:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left( \sum_{n=1}^{\nu} b_n \right)^p \geq p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n \beta_n)^p.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [7].

2. Будем говорить что некоторая функция  $\alpha(t)$  есть функция типа  $\sigma$ , если она измерима на  $[0, 1]$ , суммируема на  $[\delta, 1]$  для любого  $\delta \in (0, 1)$  и если существуют действительные числа  $\sigma, \delta > 0$  и число  $\delta_0 \in (0, 1)$  такие, что

- 1)  $\alpha(t) \geq 0$  для всех  $t \in [0, 1]$ ,
- 2)  $\int_0^{\delta} \alpha(t) t^s dt < \infty$  для всех  $s > \sigma$  и  $t \in (0, \delta_0)$ ,
- 3)  $\int_0^{\delta} \alpha(t) t^s dt = \infty$  для всех  $s < \sigma$  и  $t \in (0, \delta_0)$ .

Будем говорить, что  $f(x) \in B(p, \theta, k, \alpha)$  если

1.  $f(x) \in L_p$ , для некоторого  $p$  из промежутка  $1 \leq p \leq \infty$ ,
2.  $\theta$  – некоторое число из промежутка  $0 < \theta < \infty$ ,
3.  $\alpha(t)$  – функция типа  $\sigma$ ,
4.  $\int_0^1 \alpha(t) \omega_k^\theta(f, t)_p dt < \infty$ ,

где  $k$  – некоторое натуральное число удовлетворяющее условию  $k > \sigma/\theta$ . Условие  $k > \sigma/\theta$  гарантирует, что класс  $B(p, \theta, k, \alpha)$  состоит не только из констант (см. [8]).

ТЕОРЕМА 1. Если периодическая функция  $f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$  принадлежит классу  $B(p, \theta, k, \alpha)$  при  $2 \leq p < \infty$ , то её коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\text{для } \theta \geq 2: \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) < \infty \\ &\text{для } \theta \leq 2: \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty, \text{ где} \end{aligned}$$

$$A(\nu) = \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) dt, \quad b(\nu) = b_1(\nu) + b_2(\nu),$$

$$b_1(\nu) = \nu^{k\theta} \int_0^{1/\nu} \alpha(t) t^{k\theta} dt, \quad b_2(\nu) = \int_{1/(\nu+1)}^1 \alpha(t) dt,$$

$k\theta > \sigma$ ,  $k$  – натуральное число и  $\theta > 0$ .

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \alpha(t) \omega_k^\theta(f, t)_p dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) \omega_k^\theta(f, 1/\nu)_p dt \geq \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta(f, 1/(\nu+1))_p \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) dt \geq \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \omega_k^\theta(f, 1/(\nu+1))_p \geq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \omega_k^\theta(f, 1/\nu)_p \end{aligned}$$

Используя оценку модуля гладкости (см. первое неравенство леммы 1, для  $2 \leq p < \infty$ , имеем

$$(1) \quad \begin{aligned} &C_2 \sum_{\mu=1}^{\infty} A(\mu) \left\{ \frac{1}{n^k} \left( \sum_{|\nu|=1}^{\mu} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{1/2} + \left( \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \right\}^\theta \geq \\ &\geq C_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} \left( \sum_{|\nu|=1}^{\mu} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{\theta/2} + C_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} A(\mu) \left( \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{\theta/2} \end{aligned}$$

Если  $\theta \geq 2$ , то из леммы 2 следует

$$I \geq C_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} \sum_{|\nu|=1}^{\mu} |c_\nu|^\theta |\nu|^{k\theta} + C_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} A(\mu) \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^\theta$$

Меняя порядок суммирования и делая простые выкладки, получим:

$$\begin{aligned} I &\geq C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta \left\{ |\nu|^{k\theta} \sum_{n=|\nu|}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} + \sum_{n=1}^{|\nu|} A(n) \right\} = \\ &= C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta \{b_1(|\nu|) + b_2(|\nu|)\} = C_4 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|). \end{aligned}$$

Если же  $\theta \leq 2$  то, применяя лемму 3 и лемму 4, из (1) получим:

$$\begin{aligned} I &\geq C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} [|c_\mu|^2 |\mu|^{2k} \gamma_1(|\mu|)]^{\theta/2} + \\ &= C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A(|\mu|) [|c_\mu|^2 \gamma_2(|\mu|)]^{\theta/2}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_1(\nu) = \left( \nu^{k\theta} \sum_{n=|\nu|}^{\infty} \frac{A(n)}{n^{k\theta}} \right) / A(\nu)$  и  $\gamma_2(\nu) = \left( \nu^{k\theta} \sum_{n=1}^{\nu} A(n) \right) / A(\nu)$ .

Так как  $\gamma_1(\nu) \geq A_1 b_1(\nu) / A(\nu)$  и  $\gamma_2(\nu) \geq A_2 b_2(\nu) / A(\nu)$  то, для простые выкладки, получим

$$\begin{aligned} I &\geq C_4 \sum_{n=1}^{\infty} A(|\nu|) |c_\nu|^\theta \left\{ \left[ \frac{b_1(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right]^{\theta/2} + \left[ \frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right]^{\theta/2} \right\} \geq \\ &\geq C_5 \sum_{n=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta A(|\nu|) \cdot \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/2} = \\ &= C_5 \sum_{n=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \cdot \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/2-1} \end{aligned}$$

**ТЕОРЕМА 2.** Если периодическая функция

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

принадлежит классу  $B(p, \theta, k, \alpha)$  при  $1 < p \leq 2$ , то её коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \text{для } \theta \geq p: \quad &\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} \cdot b(|\nu|) < \infty \\ \text{для } \theta \leq p: \quad &\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \cdot \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/p-1} < \infty \end{aligned}$$

*Доказательство.* Используя оценку модуля гладкости (см. неравенство леммы 1, для  $1 < p \leq 2$ ), имеем

$$\begin{aligned} (2) \quad I &\geq C_1 \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{A(|n|)}{|n|^{k\theta}} \left( \sum_{|\nu|=1}^n |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2} \right)^{\theta/p} + \\ &+ C_1 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|n|) \cdot \left( \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{\theta/p} \end{aligned}$$

Если  $\theta \geq p$ , применяя лемму 2, меняя порядок суммирования и делая простые выкладки (аналогично доказательству теоремы 1), получим

$$I \geq C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|).$$

Если же  $\theta \leq p$  то, применяя лемму 3 и лемму 4, из (2) следует

$$I \geq C_3 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/p-1}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Бериша, *О коэффициентах Фурье некоторых классов функций*, Glasnik Mat. Ser. II **16(36)** (1981), 75–90.
- [2] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Chelsea, New York, 1952.
- [3] М. Потапов, М. Бериша, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменого*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **26(40)** (1979), 215–228.
- [4] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Москва 1961.
- [5] Г.Б. Харди, Д.Е. Литльвуд, Г. Полия, *Неравенства*, ГИИЛ Москва, 1984.
- [6] К.М. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Matematica (Cluj), **14(37)**(1972), 123–146.
- [7] L. Leindler, *Über verschiedene konvergenzarten trigonometrischer Reihen III (Bedingungen in der Metric von  $L_p$ )*, Acta Sci. Math. **27** (1966), 205–215.
- [8] М. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций*, Изв. АН СССР **4**(1969), 840–860.

Природно-математички факултет  
Приштина  
Југославија

(Поступила 29 10 1982)