PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 61–67

COMPLÉMENTS AUX TRAITÉS DE KAMKE ET DE MURPHY IV. QUELQUES CRITÈRES SUFFISANTS D'INTÉGRABILITÉ EFECTIVE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLELE LINÉAIRE ET HOMOGÈNE DU SECOND ORDRE À DEUX COEFFICIENTS ARBITRAIRES

Andrzej Kapcia

Résumé. En profitant de la correspondance entre l'équation de Riccati et l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre, et des résultats obtenus pour l'qation de Riccati, on donne quelques critères suffisants d'intégrabilité effective de l'équation linéaire et homodène.

0. Introduction

On sait bien, qu'il existe une correspondance biunivoque entre l'équation de Riccati

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{0.1}$$

où $a \neq 0$, $a \in C_x^1$, $b, c \in C_x$, $X \equiv (x_1, x_2)$, et l'équation linéaire et homogène

$$f(x)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \tag{0.2}$$

où $f \neq o$, $f \in C_x^1$, g et $h \in C_x$. Profitant de cette correspondance nous allons trouver des critères d'intégrabilité effective de l'équation (0.2) correspondant à des critères d'intégrabilité des classes de l'équation (0.1) obtenues dans notre travail [**5**].

Tous les résultats obtenus sont confrontés avec les résultats publiés dans le traité de E. Kamke [**3**] ou [**4**] et G. Murphy [**9**]. Dans [**3**] il y a 545 équations du type (0.2) – homogène et non homogène (sans équations citées dans les compléments – 11 notes (104 équations, v. [**4**]), et dans [bf 9] il y a 596 équations de ce genre. De ces ensembles des équations, on peut obtenir 278 de quatre classes, qu on obtient des

---

AMS Subject Classification (1980): Primary 34A05 conditions données dans ce travail, et de plus, 476 équations satisfont aux critères donnés avec certaines restrictions.

J'exprime mes sincères remerciments à M-mes M. Lupa et B. Waligòra pour la collaboration pendant l a vérification des équations de [**3**] et [**9**] au point de nos critères.

1. Remarques sur la construction des équations linéaires et homogènes du second ordre effectivement intégrables

Dans [**5** p. 120], nous avons donné la méthode générale de construction des équations différentielles de Riccati (0.1) effectivement intégra bles en l'appliquant dans les cas suivants:

$$y' - a(x)y^2 = 0 \quad \text{et} \quad b(x)y + c(x) = 0, \tag{1.1}$$

$$y' - b(x)y = 0 \quad \text{et} \quad a(x)y^2 + c(x) = 0, \tag{1.2}$$

$$y' - c(x) = 0 \quad \text{et} \quad a(x)y^2 + b(x)y = 0. \tag{1.3}$$

Ici nous considérons encore le cas:

$$y' = 0 \ \text{ et } \ a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0. \tag{1.4}$$

Il conduit à la condition bien connue

$$a(x)K^2 + b(x)K + c(x) = 0 \tag{1.5}$$

pour $x \in X$ (où K – Cte réelle arbit., v. p. ex. ([**3**], p. 23] ou [**9**, p. 20]).

Pour obtenir les solutions et conditions qui correspondent aux solutions et conditions données dans [**5**], nous profiterons de la transformation

$$y = -u'/a(x)u, \tag{1.6}$$

qui transforme chaque équation (0.1) en l'équation

$$u'' - \frac{a'(x) - a(x)b(x)}{a(x)}u' + a(x)c(x) = 0, \tag{1.7}$$

et aussi chaque solution particulière yo de (0.1) en la solution particulière

$$u_0 = C \exp\left(-\int a(x)y_0(x)dx\right) \tag{1.8}$$

de l'équation (1.7). Nous transformons maintenant l'équation (1.7) en la forme (0.2) en introduisant les substitutions suivantes:

$$a(x) \equiv 1/f(x), \ \ b(x) \equiv (f'(x) - g(x))/f(x)), \ \ c(x) \equiv h(x). \tag{1.9}$$

Sa solution particulière prend donc la forme

$$u_0 = \exp\left(-\int y_0(x)/f(x)dx\right), \ \ (C = 1); \tag{1.10}$$

dans laquelle la solution yo est exprimée en fonctions de f, g ou h. On sait bien que de la formule de Liouville on obtient la deuxième solution linéairemant indépendante (v. p. ex. [**3**, p. 117], [**6**, p. 394], ou [**8**, p. 41]).

Comme dans [**5**], on donne onze différentes solutions particulières de l'équation (0.1), alors nous pouvons construire, au moins, onze solutions particulières de l'équation (0.2). Ces solutions sont données dans les chap. 2, 3, 4 et 5 (v. (2.1), (2.3), (3.1), (3.3.1), (3.3.2), (4.1); (4.3), (5.1) et (5.3)). Analogiquement, en profitant des substitutions (1.9) dans les conditions de [**5**] et dans (1.5), on obtient les conditions correspondantes pour l'équation (0.2) (cf. (2.2), (2.4), (3.2) etc.). Des conditions obtenues (cf. p. ex. (2.2) et (3.2)), on construit, si cela est possible, les sous-classes de l'équation (0.2) effectivement intégrables.

Introduisons encore les opérateurs suivants:

$$L_1^*(u) = -f(x)u''/u - f'(x)u'/u, \tag{1.11}$$

$$L_2^*(u) = (g(x) - f'(x))u'/u + h(x); \tag{1.12}$$

$$L_3^*(u) = -f(x)u''/u - g(x)u'/u + f(x){u'}^2/u^2, \tag{1.13}$$

$$L_4^*(u) = f(x){u'}^2/u^2 + h(x); \tag{1.14}$$

$$L_5^*(u) = -f(x)u''/u - f'(x)u'/u + f(x){u'}^2/u^2 - h(x), \tag{1.15}$$

$$L_6^*(u) = f(x){u'}^2/u^2 + (g(x) - f'(x))u'/u; \tag{1.16}$$

$$L_7^*(u) = -f(x)u''/u - f'(x)u'/u + f'(x)u'/u - h(x){u'}^2, \tag{1.17}$$

$$L_8^*(u) = f(x){u'}^2/u^2 - (f'(x) - g(x))u'/u + h(x). \tag{1.18}$$

On les obtient des côtés gauches des équations (1.1) - (1.4) en appliquant la transformation (1.6) et les formules (1.9). Il est évident, que de chaque paire convenable de ces formules résulte l'équation (0.2). On peut donc l'écrire pour $u \neq 0$ sur X en forme

$$L_{2k-1}^*(u) = L_{2k}^*(u) \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{1.19}$$

Nous formulerons des théorèmes en forme des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction, obtenue après des transforxnation citées ci-dessus, soit la solution particulière de l'équation (0.2).

2. Cas correspondant au cas $y' - a(x)y^2 = 0$ et $b(x)y + c(x) = 0$

THÉORÈME 2.1. *Lu condition nécessaire et suffisante pour que Ia fonction*

$$u_0 = \int f^{-1}(x)dx + K, \tag{2.1}$$

où K-Cte réelle arbit., soit une solution particulière de l'équation (0.2) à coefficients $f \in C_X^1$, $g, h \in C_X$ et $f \neq 0$ dans X, est que les fonctions f, g et h satisfassent à la condition

$$f(x)h(x) + (g(x) - f'(x)) \left| \int f^{-1}(x)dx + K \right|^{-1} = 0 \tag{2.2}$$

pour $x \in X$.

THÉORÈME 2.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$u_0 = \exp\left(\int \frac{h(x)dx}{f'(x) - g(x)}\right), \tag{2.3}$$

soit une solution particulière de l'équation (0.2) à coefficients $f \in C_X^2$, $g, h \in C_X$, $fh \neq 0$, $f' - g \neq 0$ *dans* X, *est gue les fonctions f, g et h satisfassent à la condition*

$$\frac{1}{f(x)}\left[\frac{f'(x) - g(x)}{f(x)h(x)}\right]'_x = 0 \tag{2.4}$$

pour $x \in X$.

Remarque 2.1. La condition (2.2) est satisfaite par 37 équations des traités [**3**] ou [**4**] et [**9**], et 28 de ces équations satisfont à la condition (2.4).

Démonstration. (La construction générale des démonstrations des théorèmes: 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 5.1 et 5.2.) On démontre analogiquement tous les théorèmes cités dans ce travail en appliquant la procédure suivante. On profite convenablement de l'équation (0.2) en forme (1.19) et des opérateurs (1.11) – (l.l8). Dans le chapitre 2 – l'équation (1.19) pour $k = 1$ et les opérateurs (1.11) et (1.12); dans le chapitre 3 – l'équation (1.19) pour $k = 2$ et les opérateurs (1.13) et (1.14) etc. En profitant des fonctions (2.1), (2.3) etc., citées dans les théorèmes 2.1, 2.2 etc., on démontre succéssivement la nécessité et la suffisance des conditions citées.

Remarquons encore qu'on peut obtenir la condition (2.1) des coefficients de l'équation (7.15) du travail [**1**] (si son troisième terme est correct).

3. Cas correspondant au cas $y' - b(x)y = 0$ et $a(x)y^2 + c(x) = 0$

THÉORÈME 3.1. *La condition nécessaire et suffisante pour gue Ia fonction*

$$u'' = \exp\left(-\int K^* \exp\left(-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right)dx\right), \tag{3.1}$$

ou $K^* = K$, K *– Cte réelle arbit. (où* K^* *– Cte imaginaire pure:* $K^* = iK$*), soit respectivement une solution particulière réelle (ou imaginaire) de l'éguation (0.2) à coefficients* $f, g, h \in C_X$, $f \neq 0$ *et* $fh \leq 0$ *(ou* $fh > 0$*) dans l'intervalle X, est gue les fonctions f, g et h satisfassent à la condition*

$$h(x) \pm K^2 f(x) \exp\left(-2\int g(x)/f(x)dx\right) = 0 \tag{3.2}$$

pour $x \in X$ *(le signe plus pour* K^* *– réel, le signe moins pour* K^* *- imaginaire).*

THÉORÈME 3.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$u_{01} = \exp\left(-\int(-h(x)/f(x))^{1/2}dx\right), \tag{3.3.1}$$

$$u_{02} = \exp\left(\int(-h(x)/f(x))^{1/2}dx\right), \tag{3.3.2}$$

soient des solutions particulières de l'éguation (0.2) à coefficients $f, h \in C_X$, $g \in C_X$ *et* $f \neq 0$, $fh \leq 0$ *ou* $fh > 0$ *dans* X, *est que les fonctions* f, g *et* h *satisfassent à la condition*

$$f(x)h'(x) - (f'(x) - 2g(x))h(x) = 0 \tag{3.4}$$

dans l'intervalle X.

Remarque 3.1. Si les solutions particulières sont imaginaires, alors on construit les solutions réelles linéairement indépendantes d'une manière bien connue.

Remarque 3.2. Les conditions (3.2) et (3.4) sont satisfaites par 136 équations des traités [**3**] ou [**4**] et [**9**]. Beaucoup de résultats donnés dans [**3**], [**4**] et [**9**], peuvent être complétés et élargis.

4. Cas correspondant au cas $y' - c(x) = 0$ et $a(x)y^2 + b(x)y = 0$

Théorème 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$u_0 = \exp\left(-\int f^{-1}(x)\left(\int h(x)dx + K\right)dx\right), \tag{4.1}$$

où K – *Cte réele arbit., soit une solution particulière de l'équation (0.2) à coeffcients* $f \in C_X^1$, $g, h \in C_X$, *et* $f \neq 0$ *dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* f, g *et* h *satisfassent à la condition*

$$\int h(x)dx + K + f'(x) - g(x) = 0 \tag{4.2}$$

pour $x \in X$.

Théorème 4.2. *La condition nécessaire et suffiscrnte pour que la fonction*

$$u_0 = \exp\left(\int \frac{f'(x) - g(x)}{f(x)}dx\right),$$

soit une solution particulière de l'éguation (0.2) à coefficients $f \in C_X^2$, $g \in C_X^1$, $h \in C_X$ *et* $f \neq 0$ *dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* f, g *et* h *satisfassent à la condition*

$$h(x) - (g(x) - f'(x))'_X = 0 \tag{4.4}$$

pour $x \in X$.

La condition (4.4) est bien connue – v. [**3**, p. 119]. L'ẑquation (0.2) est dans ce cas une équation aux differentielles totalles. Dans ce travail elle était obtenue totalement d'une autre manière.

Remarque 4.1. Les conditions (4.2) et (4.4) sont satisfaites par 95 équations des traités [**3**] ou [**4**] et [**9**].

5. Cas correspondant au cas $y' = 0$ et $a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$

THÉORÈME 5.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que Ia fonction*

$$u_0 = \exp\left(-\int Kf^{-1}(x)dx\right), \tag{5.1}$$

où K – Cte réelle arbit. (ou K – Cte complexe arbit., $K = a+ib$), soit une solution pctrticulière de l'éguation (0.2) à coefficients $f \in C^1_X$, $g, h \in C_X$ et $f \neq 0$ dans l'intervalle X, est que les fonctions f, g et h satisfassent à la condition

$$K^2 + Kf'(x) - Kg(x) + f(x)h(x) = 0 \tag{5.2}$$

pour $x \in X$. La condition (5.2) pour K – complexe est éguivalente au système de conditions suivantes

$$g(x) - 2a - f'(x) = 0 \text{ et } f(x)h(x) - (a^2 + b^2) = 0. \tag{5.2'}$$

Remarque 5.1. La condition (5.2) est une généralisation de la condition donée par H. Göertler (v. [**2**] ou [**3**] l'équation 2.444 a).

Remarque 5.2. La condition (5.2) (K – réel ou K – complexe) est satisfaite par 125 équations des traités [**3**] ou [**4**] et [**9**].

THÉORÈME 5.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$u_0 = \exp\left(\int \frac{f'(x) - g(x) \mp \sqrt{\Delta(x)}}{2f(x)}dx\right), \tag{5.3}$$

où $\Delta(x) \equiv (f'(x) - g(x))^2 - 4f(x)h(x)$; et 1) $\Delta(x) \geq 0$ ou 2) $\Delta(x) < 0$, soient des solutions particulières de l'équation (0.2) à coefficients $f \in C^2_X$, $g, h \in C_X$ et $f \neq 0$ dans l'intervalle X, est que les fonctions f, g et h satisfassent respectiventent aux conditions

$$\left[f'(x) - g(x) \mp \sqrt{\Delta(x)}\right]'_x = 0 \tag{5.4}$$

pour $\Delta(x) \geq 0$ et $x \in X$; et

$$(f'(x) - g(x))'_x = 0 \text{ et } (\Delta(x))'_x = 0 \tag{5.4'}$$

pour $\Delta(x) < 0$ et $x \in X$.

Des conditions citées on peut obtenir quelques sous-classes de l'équation (0.2), qui sont des généralisations de plus de 300 équations citées dans les remarques, mais on peut les obtenir toutes seulement de quatre classes.

6. Remarques finsles

Les critères de cette note sont aussi satisfaits par beaucoup d'équations données dans des travaux originaux – par exemple les équations 3 de [**7**] et 1.1 –

1.25 de [**10**]. On peut renforcer tous ces résultats en introduisant dans le troisième coefficient la const. arbit.: $\mp K^2$.

On peut élargir les résultats présentés en définissant différement les systèmes de fonctions, par exemple, le système

$$a(x) \equiv h(x), \quad b(x) \equiv -h'(x)/h(x) - g(x)/f(x), \quad c(x) \equiv 1/f(x), \tag{6.1}$$

conduit au critère

$$f(x)h'(x) + h(x)\left(g(x) + \int h(x)dx + K\right) = 0. \tag{6.2}$$

Une autre manière se fonde sur la déformation des équations, qu'on peut obtenir de nos critères, par le changement de variable $u = \alpha(x)y$. Par exemple, l'équation

$$f(x)u'' + g(x)u' \mp K^2 f(x)\exp\left(-2\int g(x)/f(x)dx\right)u = 0 \tag{6.3}$$

après cette déformation prend la forme

$$\begin{aligned} &\alpha(x)f(x)y'' + (\alpha(x)g(x) + 2\alpha'(x)f(x))y' + \\ &+\left(\alpha''(x)f(x) + \alpha'(x)g(x) \mp K^2\alpha(x)f(x)\exp\left(-2\int g(x)/f(x)dx\right)\right)y = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Parce que pour beaucoup d'équations (0.2) on peut trouver: α, f, g et K, c. -à-d. on peut les écrire dans la forme (6.4), alors on peut les transformer à l aide de substitution: $y = \alpha^{-1}(x)u$ en l'équation (6.3), qui est effectivement intégrable.

Les idées d obtention des classes d'éuations (0.2), introduites dans cette note, permettent d'intégrer effectivement beaucoup d'équations linéaires du second ordre et ainsi elles permettent d'élargir les résultats présentés dans [**3**] ou [**4**] et [**9**], ainsi que dans des notes originales.

LITTÉRATURE

[1] Л.М. Беркович, Н.Х. Розов, А.М. Эйшинский, *О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях высших порядков и о некоторых уравнениях второго порядка, интегрируемых в конечном виде*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **230** - No **241** (1968), 61–87,

[2] H. Görtler,*Ergänzungen zu: Kamke Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Zeitschr. Angew. Math. Mech. **22** (1942), 233–234.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig, 1959.

[4] Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва, 1965.

[5] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy III. Quelques critères suffisants de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **22** (**36**) (1977), 119–126.

[6] N.M. Matwiejew, *Metody calkowania ròwnań ròzniczkowych zwyczajnych*, Warszawa,1970.

[7] D.S. Mitrinović, *Compléments au Jraité de Kamke, Note II*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **7** (1953), 153–160.

[8] D.S. Mitrinović, *Predavanja o diferencijalnim jednačinama*, Univ. Beograd, Subotica – Beo-grad, 1976.

[9] G.M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey, New York, 1960.

[10] J. Zbornik, *Zur Auflösung linearer homogener Differentialgleichung 2 Ordnung*, Zeitschr. Angew. Math. Physik **7** (1956), 64–74.

Institut Mathématique
L'École Polytechnique, 42–201
Częstochowa, Polgne

(Reçu le 12 11 1979)
(Version abrégée reçue le 15 12 1983)