PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 34 (48), 1983, pp. 65-70

SUR CERTAINS ESPACES DE RIEMANN SYMÉTRIQUES

Eftimie Grecu

Introduction. E Cartain [**1**] a montré que la transformation linéaire qui engendre un automorphisme involutif du groupe unitaire complexe peut être amenée à l'une des formes canoniques:

(1) $z'^1 = z^1, \ldots, z'^q = z^q, \; z'^{q+1} = -z^{q+1}, \ldots, z'^p = -z^p$

(2) $z'^{2i-1} = -z^{2i}, \; z'^{2i} = z^{2i-1}, \; (i = 1, \ldots, p)$

(3) $z'^1 = \bar{z}^1, \ldots, z'^p = \bar{z}^p$

oú $z^1, \ldots, z^p$ (dans les cas 1 et 3) ou $z^1, \ldots, z^{2p}$ (dans le cas 2) sont des coordonnés complexes orthogonales dans l'espace unitare complexe où est défine le groupe considéré, $\bar{z}$ étant le conjugué du nombre complexe z.

E. Cartan [**2**] a montré de même que à chaque automorphisme involutif du groupe unitaire complexe correspond un espace riemannien symétrique ayant ce groupe comme groupe de mouvements.

On sait [**11**] que les espaces symétriques associés à l'automorphisme (1) sont les espaces de Grassmann complexes.

Dans la présente note nous étudions les espaces riemanniens symétriques qui correspondent à l'automorphisme involutif (2) du groupe unitaire complexe $U(2p)$.

Nous montrons d'abord que le sous-groupe des éléments fixes d'automorphisme (2) a $2p^2$ paramètres, d'où il résulte que l'espace de Riemann symétrique V_n dont le groupe de stabilité coïncide avec le sous-groupe ci-dessus a $n = 2p^2$ dimensions.

En ce qui concerne l'élément d'arc, nous démontrons que les espaces V_n peuvent être plongés de façon non holonome et holonome dans la variété repreésentative du groupe unitaire complexe $U(2p)$.

Enfin, nous trouvons une représentation paramétrique rationelle de l'espace V_n d'où il résulte que cet espace est une variété algébrique l'espace V_n, rationnelle.

AMS Subject Classification (1980): Primary 53 C 35, Secondary 20 D 45.

Nous déterminons aussi l'expression locale de la métrique de relative à la carte considérée.

1. Définition des espaces V_n. On sait [**11**] que le groupe unitaire complexe en $2p$ variables $U(2p)$ a $4p^2$ paramètres. Il est isomorphe au groupe symplectique orthogonal en $4p$ variables $\Omega(4p)$, formé des matrices réelles A d'ordre $4p$, qui satisfont les relations.

$$A\tilde{A} = E, \quad AI = IA \tag{4}$$

où E est la matrice unité d'ordre $4p$, $\tilde{A}$ signifie la transposé de la matrice A, et I est la matrice suivante d'ordre $4p$

$$I = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{array} \right\|$$

Soit J un élément fixe du groupe $\Omega(4p)$. On sait que l'application f : $\Omega(4p) \to \Omega(4p)$, définie comme il suit

$$f(A) = JAJ^{-1} \tag{5}$$

est un automorphisme intérieur du groupe $\Omega(4p)$.

Il est facileà voir que f est une involution de l'ensemble $\Omega(4p)$ si et seulement si, quel que soit $A \in \Omega(4p)$, nous avons la relation

$$AJ^2 = J^2A \tag{6}$$

Cette relation a lieu si et seulement si J^2 est une matrice scalaire, donc

$$J^2 = \lambda E, \quad \lambda \in R\backslash\{0\}. \tag{7}$$

De la relation $J\tilde{J} = E$ il résulte que $(\det J)^2 = 1$ mains de la relation (7) il résulte que $(\det J)^2 = \lambda^{4p}$. Par conséquent, nous avons $\lambda^{4p} = 1$, donc $\lambda = \pm 1$.

Pour $\lambda = -1$, nous avons $J^2 = -E$, donc J est un élément antiinvolutif iu groupe $\Omega(4p)$. La matrice suivante

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfait les relations $J\tilde{J} = E$, $JI = IJ$, $J^2 = -E$, donc elle engendre un automorphisme involutif du groupe $\Omega(4p)$.

Dans les variables complexes, cet automorphisme est même l'automorphisme involutif (2) du groupe unitaire complexe $U(2p)$.

L' ensemble des éléments fixes de l'automorphisme involutif (5) est formé des matrices $A \in \Omega(4p)$ qui satisfont la relation

$$AJ = JA \tag{8}$$

comme on peut vérifier trés facilement. Cet ensemble est un sousgroupe du groupe $\Omega(4p)$.

Pour déterminer la dimension de ce sous-groupe observons d'abord que si la matrice A satisfait la relation $AI = IA$, alors elle a la forme suivante donnée dans [**4**] et notamment

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{4p-1} & a_1^{4p} \\ -a_1^2 & a_1^1 & \dots & -a_1^{4p} & a_1^{4p-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{4p-1}^1 & a_{4p-1}^2 & \dots & a_{4p-1}^{4p-1} & a_{4p-1}^{4p} \\ -a_{4p-1}^2 & a_{4p-1}^1 & \dots & -a_{4p-1}^{4p} & a_{4p-1}^{4p-1} \end{array} \right\|$$

donc elle possède $8p^2$ éléments indépendents.

Il est facile à voir que la matrice A ci-dessus satisfait la relation (8) si elle a la forme cellulaire

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} A_1^1 & \dots & A_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ A_p^1 & \dots & A_p^p \end{array} \right\|, \quad A_i^j = \left\| \begin{array}{cccc} a_{4i-3}^{4j-3} & a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-1} & a_{4i-3}^{4j} \\ -a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-3} & -a^4 j_{4i-3} & a_{4i-3}^{4j-1} \\ -a_{4i-3}^{4j-1} & a_{4i-3}^{4j} & a_{4i-3}^{4j-3} & a_{4i-3}^{4j-2} \\ -a_{4i-3}^{4j} & -a_{4i-3}^{4j-1} & -a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-3} \end{array} \right\| \quad (1, j = 1, \dots, p)$$

d'où il résulte que la matrice A possède maintenant $4p^2$ éléments indépendants.

En tenant compte de la forme cellulaire de la matrice dans la relation $A\tilde{A} = E$, il résulte que le nombre des relations d'orthogonalité distinctes est

$$2p + 4[1 + 2 + \dots + (p-1)] = 2p^2.$$

Par conséquent, une matrice A d'ordre $4p$, qui satisfait les relations (4), (8) possède $2p^2$ éléments indépendants. Nous avons donc le suivant

Théorème. *Le sous-groupe des éléments fixes de l'automorphisme involutif* (5) *a* $2p^2$ *paramètres.*

À l'automorphisme involutif (5) du groupe $\Omega(4p)$ correspond un espace riemannien symétrique V_n à $n = 4p^2 - 2p^2 = 2p^2$ dimensions, si nous considérons le groupe des éléments fixes de cet automorphisme comme sous-groupe de stabilité de V_n.

La métrique de V_n est induite par métrique de l'espace euclidien R^{16pp} dans lequel est plondgé V_n.

2. Plongement non holonome de l'espace V_n. Soit l'espace euclidien R^{16pp} (a_k^l), $(k, l = 1, \dots, 4p)$, ayant la métrique

$$ds^2 = Tr(dAd\tilde{A}) \tag{9}$$

où $Tr(M)$ signifie la trace de la matrice M, mais dA la différentielle de le matrice A.

Introduisons dans l'espace R^{16pp} les formes de Pfaff

$$dF = \tilde{A} \cdot dA \tag{10}$$

De (4), (9) et (10) on obtient les formules

$$d\tilde{F} = -dF \tag{11}$$

$$dA = A \cdot dF \tag{12}$$

$$I \cdot dF = dF \cdot I \tag{13}$$

$$ds^2 = Tr(dFd\tilde{F}). \tag{14}$$

Considérons maitenant le systéme de Pfaff

$$J \cdot dF = -dF \cdot J. \tag{15}$$

Il est facile de montrer que la matrice dF a $2p^2$ différentielles indèpendantes, donc le système de Pfaff (15) définit un sousespace non holonome $V_N^n (N = 4p^2)$ du groupe $\Omega(4p)$.

Les transformations des variables de l'espace R^{16pp}

$$A' = UA, \;\; U\tilde{U} = E, \;\; UI = IU$$

laissent invariantes les formes de Pfaff (10), par conséquent l'espace non holonome V_N^n possède un groupe d'automorphismes isomorphes au groupe $\Omega(4p)$.

Introduisons la matrice suivante

$$B = AJ\tilde{A}. \tag{16}$$

De (11), (12), (15) et (16) on obtient la relation

$$dB = 2AdF \cdot J\tilde{A}. \tag{17}$$

qui nous montre que la matrice B dépend de $2p^2$ paramétres.

De (14) et (17) on obtient la formule

$$ds^2 = Tr(dBd\tilde{B})/4 \tag{18}$$

qui peut être considérée comme étant la métrique de l'espace symétrique $V_n = V_N^n$. On a donc le suivant

Théorème. *La métrique de l'espace riemannien symétrique V_n coïncide avec la métrique de la variété non holonome V_N^n, définie sur l'espace V_N par le système de Pfaff* (15).

On obtient ainsi un plongement non holonome de l'espace V_n dans la variété V_N du groupe $\Omega(4p)$, variété définie dans l'espace R^{16pp} par les équations qui résultent des égalités matricielles (4).

3. Plongement holonome de l'espace V_n. De (4) et (16) on obtient les relations

$$B\tilde{B} = E, \;\; BI = IB, \;\; \tilde{B} = -B. \tag{19}$$

Comme les deux premières relations (19) coïcident avec relations (4), on peut énoncer le suivant

Théorème. *L'espace symétrique V_n peut être obtenu par l'intersection de la variété V_n du groupe $\Omega(4p)$ avac la variété linéaire $\tilde{A} = -A$.*

On a ici ce qu'on appelle un plongement holonome de l'espace V_n dans la variété V_N du groupe $\Omega(4p)$.

4. Représentation paramétrique rationnelle de l'espace V_n. Considérons une matrice réelle C d'ordre $4p$, qui satisfait les relations

$$\tilde{C} = -C, \;\; IC = CI, \;\; JC = -CJ. \tag{20}$$

Tout comme la matrice dF, la matrice C dépend de $2p^2$ paramètres.

Considérons ensuite la matrice

$$B = (E + C)^{-1} \cdot (E - C)J, \;\; | \, E + C \, | \neq 0 \tag{21}$$

qui dépend, tout comme C, de $2p^2$ paramètres.

Tenant compte de (20), il est facile à voir que la matrice B satisfait les relations (19).

Puisque l'inverse de la formule (21) est

$$C = (J - B)(J + B)^{-1}, \;\; | \, J + B \, | \neq 0$$

on peut énoncer le suivant

Théorème. *L'espace V_n est une variété algébrique rationnelle, la formule* (21) *en définissant une représentation paramètrique rationnelle du voisinage du point $B_0 = -J$, formé par les points B avec $| \, J + B \, | \neq 0$.*

5. La métrique de l'espace V_n. De (21) il résulte que la différentielle de la matrice B est donnée par la formule

$$dB = -2(E + C)^{-1} dC (E + C)^{-1} J. \tag{22}$$

Tenant compte de (22) dans (18), on obtient

$$ds^2 = -4Tr[dC(E - C^2)^{-1}]^2. \tag{23}$$

Nous avons donc le suivant

THÉORÈME. *L'expession locale de la métrique de l'espace V_n, relative à la carte* (21) *est définie par la formmle* (23).

Observation. Dans les coordonnées c_k^l, qui sont les éléments de la matrice C, la métrique de l'espace riemannien symétrique V_n a une forme simple, analogue à la métrique de l'espace représentatif du groupe orthogonal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartain, *Groupes simples clos et ouverts et gémétrie riemannienne*, J. Math. Pures Appl., **8** (1929), 1–33.

[2] E. Cartan, *Les espaces riemanniens symétriques*, Verh. Inst. Math. Kongr. Zürich, **1** (1932), 55–74.

[3] J. Dieudonné, *On the automorphisms of the classical groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **2** (1951).

[4] E. Grecu, *Sur la variété du groupe orthogonal symplectique*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **23** (1978), 727–733.

[5] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.

[6] P. Lardy, *Sur la détermination des structures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphies involutives*, Comment. Math. Helv. **8** (1935-1936), 189–234.

[7] C. Teleman, *Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques*, Rev. Roumanie Math. Pures Appl. **2** (1957), 445–470.

[8] C. Teleman, *Sur les variétés de Grassmann*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. S. Roumanie **2** (**50**) (1958), 205–224.

[9] C. Teleman, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*, Bucuresti, Editura didactică şi pedagogică, 1964.

[10] C. Teleman, *Geometrie diferenţială locală şi globală*, Editura Tehnică Bucureşti, 1974, 305–338.

[11] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, Édition Acad. R.P.R., Bucareşst, **3** (1964), 35–38, 275–298.

[12] G. Vranceanu, *Sur une classe d'espace symétrique*, Deutsche Akademie Wissenschaft, Berlin, Bericht der Riemann-Tagung des Forschugsinstitut fur Math., **1** (1957), 112–123.

Institutul Politehnic Bucuresti
Roumanie

(Reçu 24 09 1982)