PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 187–191

D-QUASI-REGULARITÄT UND D-NILPOTENZ IN FASTRINGEN MIT STRENG KLEINEM DISTRIBUTIVITÄTSDEFEKT D

Veselin Perić

1. Einleitung

Wir betrachten hier die Fastringe R mit linker Distributivität und mit der Eigenschsft $0x = 0$ $(x \in R)$. Für so einen Fastring R bezeichnen wir mit D den Distributivitätsdefekt von R. D ist ein Ideal von R und $\overline{R} = R/D$ ist ein distributiv erzeugbarer (d.e.) Fastring. R hat ein D-Einselement e, d.h. ein Element e mit $ex - x$, $xe - x \in D$ $(x \in R)$, gehau dann., wenn der d.e. Fastring $\overline{R} = R/D$ ein Einselement $\overline{e}$ hat; in diesem Fall ist $\overline{e} = e + D$.

J. C. Beidleman [**1**] hat in einem d.e. Fastring R mit Einselement e die Quasi-Regalarität der Elemente und der R-Untergruppen definiert. In diesen Terminen ist es ihm gelungen einige Eigenschaften der Radikaluntergruppe A und des Radikals $J(R)$ von R nachzuweisen. Unter absteigender Kettenbedingung $(a.Kb.)$ für die R-Untergruppen hat er u.a.be wiesen: jede quasi reguläre echte R-Untergruppe von R ist nilpotent; die Umkehrung gilt, falls die Kommutatorenuntergruppe R_0 der additiven Gruppe R, die ja ein Ideal von R ist, ein quasi reguläres Ideal von R ist; das Quasi-Radikal N von R ist ein quasi reguläres rechtes Ideal von R genau dann, wenn die Radikaluntergruppe A von R alle nilpotenten rechten Ideale von R umfasst; ist das Quasi-Radikal N von R in der Radikaluntergruppe A von R enthalten, so ist A ein rechtes Ideal von R genau dann, wenn $N = A$.

Wir möchten hier zeigen, wie man die Quasi-Regalarität von d.e. auf die Fastringe mit Distributivitätsdefekt D in Form der D-Quasi-Regularität übertragen kann. Dabei lassen sich unter einer zusätzlicher Bedingung auf D alle erwähnten

---

AMS Subject Classification (1980): 16A76
Key words and phrases: Near rings, defect of distributivity, Dquasi-regularity, radical and radical subgroup, D-nilpotency.
Bei der Anfertigung dieser Arbeit wurde der Verf. von dem SIZ nauke SR BiH finanziell unterstützt.

und die übrigen Ergebnisse von Beidleman in Terminen der entsprechenden D-Begriffe auf Fastringe R mit Distributivitätsdefekt D übertragen. Die entsprechenden Beweise von Beidleman lassen sich in dieser allgemeineren Situation so nachmachen, dass man die. Verallgemeinerungen direkt und ganz einfach beweist und nicht etwa aus den Ergebnissen von Beidleman ableitet, was auch, ähnlich wie in (2), geschehen konnte.

2. D-Quasi-Regulatirität der R-Untergruppen

R sei ein Fastring mit Distributivitätsdefekt D und D-Einselement e, $e \neq 0$.

Definition 1. Ein *Element* x aus R nennen wir D-quasi regulär, wenn es ein x' in R und ein d in D gibt mit $(e-x)x' = d + e$.

Eine *R-Untergruppe* B (eine Untergruppe von $(R,+)$, die in Bezug auf die rechte Multiplikation mit Elementen aus R abgeschlossen ist) heisst *D-quasi regulär*, falls jedes x aus B *D-quasi regulär* ist.

Die (*rechten*) *Ideale* von R (normale Untergruppen B von $(R,+)$ mit der Eigenschaft $(x+b)y - xy \in B$ für alle x, y aus R und b aus B) sind bekanntlich die R-Untergruppen von R. Sie sind *D-quasi regulär*, wenn sie es als R-Untergruppen sind.

Ist $D = (0)$ also R d.e., so stimmt die oben definierte D-Quasi-Regularität mit der Quasi-Regularität zusammen.

D ist ein D-quasi reguläres Ideal von R. Mit dem natürlichen Epimorphismus $\varphi : R \to \overline{R} = R/D$ hat man:

Lemma 1. *Ist B eine R-Uiztergruppe, so ist $B = \varphi^{-1}(\overline{B})$ ein R-Untergruppe. Ist B eine R-Untergruppe, so ist $B = \varphi(B)$ eine R-Untegruppe, also ist $B + D = D + B = \varphi^{-1}(\overline{B})$ eine R-Untergruppe. Dabei ist die R-Untergruppe $\varphi^{-1}(B)$ D-quasi regulär, genau dann, wenn die R-Untergruppe B quasi-regular ist. Entsprechendes gilt für die (rechten) Ideale.*

Den ganz einfachen Beweis von Lemma 1 lassen wir weg.

Definition 2. Ein *rechtes Ideal* B von R nennt man *streng maximal*, wenn B als R-Untergruppe maximal ist. Die Menge aller streng maximalen Ideale von R, bzw. aller maximalen R-Untergruppen von R bezeichnen wir mit I, bzw. mit L. Dann ist

$$J(R) = \bigcap_{B \in I} B, \quad \text{bzw.} \quad A = \bigcap_{B \in L} B$$

das Radikal, bzw. die *Radikaluntergruppe* von R. Ist $I = \emptyset$, so setze man $J(R) = R$. Falls $J(R) = R$, so nennt man R einen *Radikalfastring*.

Falls $D \neq R$, so ist sicherlich $L \neq 0$. Das folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma 2. *Keine der echten rechten R-Untergruppen $B \supseteq D$ von R enthält e. Die Menge aller solchen R-Untergruppen ist durch Inklusion induktiv geordnet. Insbesondere ist jede echte rechte R-Untergruppe B von R in einer R-Untergruppe B' aus L enthalten, oder ist $B + D = D + B = R$.*

Beweis. Sei B eine echte rechte R-Untergruppe von R. Falls $D \subseteq B$, so liegt e nicht in B. Sonst hätte man $x = d + ex \in B$ $(x \in R)$, weil $d \in D \subseteq B$.

Aufgrund dessen sieht man gleich, dass die Menge aller solchen R-Untergruppen durch Inklusion induktiv geordnet ist. Insbesondere ist jede echte rechte R-Untergruppe B in einer R-Untergruppe B' aus L enthalten, oder ist $B + D = D + B = R$; denn $B + D = D + B$ ist eine R-Untergruppe, die D umfast und ist daher entweder in einer R-Untergruppe B' aus L enthalten oder ist gleich R. Nach vorigem Lemma liegt es nahe, die folgende Bedingung an D zu stellen: D ist ein streng kleines Ideal von R, d.h. für jede R-Untergruppe B von R hat man $D + B = R \Rightarrow B = R$.

Aus Lemma 2 ergibt sich unmittelbar der folgende Satz:

Satz 1. *Ist D ein streng kleines Ideal von R, so ist jede echte R-Untergruppe B in einer R-Untergruppe B' aus L enthalten.*

Die R-Untergruppe B' aus Satz 1 braucht kein rechtes Ideal von R zu sein. Man weiss also nicht, ob jede echte R-Untergruppe B von R in einem rechten Ideal B' aus I enthalten ist. Für jede D-quasi reguläre R-Untergruppe B von R gilt im Gegensatz:

Satz 2. *Ist D ein streng kleines Ideal von R, so ist jede D-quasi reguläre R-Untergruppe B von R in $J(R)$ enthalten.*

Beweis. Ist $J(R) = R$, so ist die Behauptung klar. Sei nun B' ein beliebiges rechtes Ideal aus I. Ist B nicht in B' enthalten, so ist $B + B' = B' + B = R$; denn $B + B' = B' + B$ ist eine R-Untergruppe, die B' echt enthält. Dann gibt es also Elemente b in B und b' in B' mit $e = b' + b$. Da B D-quasi regulär ist, gibt es Elemente r in R und d in D mit $(e - b)r = b'r = e + d$. Somit wäre

$$e - b'r - d \in B'.$$

Es ist nämlich $D \subseteq B'$; denn $B' \subseteq B' + D$ und $B' + D \neq R$, weil $B' \neq R$. Nach Lemma 2 kann aber e nicht zu B' gehören, und der Satz ist bewiesen.

Auch wenn D ein streng kleines Ideal von R ist, braucht D-quasi reguläre R-Untergruppe B von R nicht in A enthalten zu sein. Es gilt jedoch:

Satz 3. *Ist D ein streng kleines Ideal von R, so ist die Radikaluntergruppe A von R D-quasi regulär und umfasst jedes rechte D-quasi reguläre Ideal von R.*

Beweis. Sei $a \in A$. Dann ist $(e - a)R = R$. Sonst gäbe es nach Satz 1 eine maximale rechte R-Untergruppe B mit $(e - a)R \subseteq B$. Infolgedessen

$$e = (e - a) - (e - a)e + (e - a)e - f - a \in B;$$

denn $(e - a) - (e - a)e \in D \subseteq B$, und $a \in A \subseteq B$.

Sei nun A' ein nichtnulltes D-quasi reguläres rechtes Ideal von R. Falls $A' \subseteq A$, so gibt es $B \in L$ mit $A' \nsubseteq B$. Deswegen ist $A' + B = B + A = R$, weil $A' + B = B + A'$ eine rechte R-Untergruppe von R ist, die B echt enthält. Sei

$$e = b + a' \ \ (b \in B, a' \in A').$$

Dann gibt es r in R und d in D mit

$$e-(e-a')r=d, \text{ d.h. } e=d+br\in B.$$

Wegen $D\subseteq B$ ist das aber nicht möglich.

Korollar 1. *Ist D ein streng kleines Ideal von R, so ist die Summe $B+B'$ zweier D-quasi regulären rechten Ideale B und B' wiederum ein rechtes D-quasi reguläres Ideal von R.*

Beweis. Nach Satz 3 ist $B, B'\subseteq A$, also $B'+B\subseteq A$, und omit ist das rechte Ideal $B+B'$ von R D-quasi regulär.

Korollar 2. *Falls D ein streng kleines Ideal von R ist, so ist $J(R)$ D-quasi regulär genau dann; wenn $J(R)=A$.*

Beweis. In jedem Fall ist $A\subseteq J(R)$. Falls $J(R)$ D-quasi regulär ist, so ist nach Satz 3 $J(R)\subseteq A$, also $J(R)=A$. Die Umkehrung folgt auch aus Satz 3.

Korollar 3. *Ist D ein streng kleines Ideal von R, so ist $(A:R)$ eine D-quasi reguläre zweisitige in A enthaltene R-Untergruppe von R, die alle D-quasi regulären Ideale von R enthalt.*

Beweis. Nach Definition ist $(A:R)=\{x\in R : Rx\subseteq A\}$. Das ist die umfassendste zweiseitige in A enthaltene R-Untergruppe von R. Sicherlich ist $D\subseteq (A:R)$; denn $Rd\subseteq D\subseteq A$ $(d\in D)$. Deswegen ist $(A/D:R/D)$ die umfassetndste in A/D enthaltene zweiseitige (R/D)-Untergruppe [**3**]. Also ist $\varphi^{-1}(A/D:R/D)$ die umfassetndsten in $\varphi^{-1}(A/D)=A$ enthaltene zweiseitige D-Untergruppe. Wegen $D\subseteq A$ ist aber wie man eicht erkennt, $x+D\in (A/D:R/D)$ genau dann, wenn $x\in(A:R)$, also $\varphi^{-1}(A/D:R/D)=(A:R)$, da $D\subseteq(A:R)$.

Korollar 4. *Ist D ein streng kleines Ideal von R und $(A:R)=(0)$, so hat R keine nichtnullten D-quasi regulären Ideale. Insbesondere ist dann $D=(0)$, also R d.e.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Korollar 3 und der Tatsache dass D ein D-quasi reguläres Ideal von R ist.

3. D-Quasi-Regularität und das Radikal eines Fastringes R mit streng kleinem Dis tributivitätsdefekt und a. Kb. für R-Untergruppen

Wir beschränken uns hier auf die Fastringe RRR mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D die der a. Kb. für die D unmfassenden R-Untergruppen genügen.

Definition 3. Eine R-Untergruppe B von. R heisst D-nilpotent, falls es eine natürliche Zahl n gibt, so dass, fïjede Folge $b_1,\dots,b_n$ in $B, b_1\dots b_n\in D$ gilt.

Satz 4. *Jede D-quasi reguläre R-Untergruppe C von R ist D-nilpotent.*

Beweis. Es ist angebracht, diesen Satz aus dem entsprechenden Satz von Beidleman abzuleiten. Der Fastring $\overline{R}=R/D$ ist d.e., hat Einselement $e+D$ und erfült die a. Kb. Ausserden ist $\overline{C}=C/D$ eine quasi reguläre $\overline{R}$-Untergruppe. Also ist $\overline{C}$ nach [**1**], Satz 3.1 nilpotent. Deswegen ist $\varphi^{-1}(\overline{C}) = C + D = D + C$ und somit auch C selbst D-nilpotent.

Korollar 1. *Ist $J(R)$ D-quasi regulär, so ist $J(R)$ auch D-nilpotent.*

Satz 5. *Sei $D \subseteq R'$ (Dann ist R' ein Ideal von R). Ist das Ideal R' von R D-quasi regulär, so ist eine R-Untegruppe B von R D-quasi regular genau dann, wenn sie D-nilpotent ist.*

Beweis. Wegen $D \subseteq R'$ ist R' ein Ideal von R; denn $R'/D = (R/D)'$ ist ein Ideal von dem d.e. Ring $R = R/D$, also ist $R' = R' + D = \varphi^{-1}((R/D)')$ ein Ideal von R. Ausserdem ist nach Satz 2 $R' \subseteq A$. Deswegen ist jede maximale R-Untergruppe B eine normale Untergruppe von $(R, +)$, also ein rechtes Ideal von R, weil $D \subseteq B$. Also ist $A = J(R)$.

Ist B eine D-nilpotente R-Untergruppe, so ist $\overline{B} = \varphi(B)$ eine nilpotente $\overline{R}$-Untergruppe, also $\overline{B} \subseteq J(\overline{R})$ ([**4**], Satz 1.5). Da nun $J(R) = J(R)/D$, so ist $B + D = \varphi^{-1}(\overline{B}) \subseteq J(R) = A$. Also ist $B + D$ und somit auch B selbst D-quasi regulär.

Ist umgekehrt B eine D-quasi reguläre R-Untergruppe, so ist B nach Satz 4 D-nilpotent.

Satz 6. *Sei R ein Fastring mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D und der a. Kb. für R-Untergruppen, die D umfassen. Dann ist $N = \bigcap B$ (B max. rechtes Ideal von R) ein D-nilpotentes rechtes Ideal, das alle D-nilpotente rechte Ideale von R umfasst.*

Beweis. Nach [**4**] ist $\overline{N} = \bigcup \overline{B}$ ($\overline{B}$ max. rechtes Ideal von $\overline{R} = R/D$) ein rechtes nilpotentes Ideal, das alle nilpotente rechte Ideale von $\overline{R}$ umfasst. $\overline{R} = R/D$ ist nämlich ein d. e. Fastring mit der a. Kb. für R-Untergruppen.

Satz 7. *Sei R ein Fastring mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D und der a. Kb. für R-Untergruppen, die D umfassen. Das Quasi-Radikal N von R ist D-guasi regulär genau dann, wenn die Radikalgruppe A von R alle nilpotente rechte Ideale von R unfasst.*

Beweis. Folgt aus [**1**], Satz 3.4, da $\overline{R} = R/D$ alle Bedingungen von diesen Satz erfüllt, und ausserdem $A = \varphi^{-1}(\overline{A})$, $N = \varphi^{-1}(\overline{N})$.

Korollar 1. *Sei R ein Fastring mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D und der a. Kb. für R-Untergruppen, die D umfassen. Das Quasi-Radikal N von R ist D-quasi regulär genau dann, wenn jedes D-nilpotente rechte Ideal von R D-quasi regulär ist.*

Beweis. Klar.

Satz 8. *Sei R ein Fastring mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D und der a. Kb. für die R-Untergruppen die D umfassen. Falls $N \subseteq A$, so ist A ein rechtes Ideal genau dann, wenn $N = A$.*

Beweis. Ist A ein rechtes Ideal, so gilt $A \subseteq N$; denn nach Satz 3 und Satz 4 ist A ein D-nilpotentes rechtes Ideal von R, und N alle solche Ideale enthält.

LITERATUR

[1] J. C. Beidleman, *Quasi-regularity in near-rings*, Math. Z. **89** (1965), 224–229.

[2] V. Perić, V. Dašić, *D-Kommutativität der Fastringe mit Distributivatätsdefekt D*, Glasnik matematički, **15 (35)** (1980), 25–31.

[3] A. Fröhlich, *Distribulively generated near-rings (I. Ideal Tbeory)*, Proc. London Math. Soc. **8** (l958), 76–94.

[4] R. R. Laxton, *A radical and its theory for d.g. near-rings*, J. London Math. Soc. **38** (1963), 40–49.

Prirodno-matematički fakultet
71000 Sarajevo
Jugoslavija

(Eingengangen den 10 06 1982)