PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 179–185

EINE CHARAKTERISIERUNG DER MENGE Ass $(\mathfrak{A})$ IN KOMMUTATIVEN NOETHERSCHEN RINGEN

Veselin Perić

Abstarct. Let R be a commutative noetherian ring. For any ideal $\mathfrak{A}$ of R the set $\mathrm{Ass}\,(\mathfrak{A})$ of all associated prime ideals of $\mathfrak{A}$ is a finite set P of prime ideals of R. If a finite set P of prime ideals of R contains no prime ideal of the height 0, i.e. no minimal prime ideal of (0), then it is well known that there exists an ideal $\mathfrak{A}$ of R such that $P = \mathrm{Ass}\,(\mathfrak{A})$ ([**1**], 9.1). It seems to be unknown what the precise necessary and sufficient condition is, on a finite set P of primes, for the existence of such an ideal $\mathfrak{A}$ ([**1**], p. 68). We answer here this question.

1. Einleitung. Jedes Ideal $\mathfrak{A}$ eines kommutativen Noetherschen Ringes R lässt eine Primmärzerlegung

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_i \tag{1}$$

zu. Dabei sind $\mathfrak{D}_i$ die Primärideale mit verschiedenen Primradikalen

$$\mathfrak{J}_i = \mathrm{rad}\,(\mathfrak{D}_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

und keine der Ideale $\mathfrak{D}_i$ enthält den Durchschnitt der übrigen Ideale $\mathfrak{D}_j$. Die Primärkomponenten $\mathfrak{D}_i$ der Primärzerlegurg (1) von $\mathfrak{A}$ sind i.a. nicht eindeutig bestimmt. Im Gegensatz dazu sind die Primideale (2) eindeutig; das sind die assozüerten Primideale von $\mathfrak{A}$, und sie bilden die Menge $\mathrm{Ass}\,(\mathfrak{A})$. Die minimalen Elemente von $\mathrm{Ass}\,(\mathfrak{A})$ sind die minimalen oder isolierten Primideale von $\mathfrak{A}$; sie bilden die Menge $\mathrm{Min}\,(\mathfrak{A})$. Die Menge $\mathrm{Ass}\,(\mathfrak{A}) \setminus \mathrm{Min}\,(\mathfrak{A})$ braucht nicht leer zu sein und besteht aus eingebetteten Primidealen von $\mathfrak{A}$. Jedes Primideal $\mathfrak{J}$ von R das $\mathfrak{A}$ umfasst, enthält mindestens ein minimales Primideal von $\mathfrak{A}$. Insbesondere sind

---

AMS Subject Classification (1980): 13A17, 13E05
Key words and phrases: Noetherian commutative rings, primary decomposition of ideals, associated prime ideals.
Bei der Anfertigung dieser Arbeit wurde der Verf. von dem SIZ nauke SR BiH finanziell unterstützt.

die minimalen Ideale von R, d.h. die Primideale von Rang 0, genau die minimalen Primideale von (0).

Für ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Primärzerlcgung (1) hat man

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}} = \bigcup_{\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}} \mathfrak{D}_i \tag{3}$$

wobei

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{J}} = f_{\mathfrak{J}}^{-1}(f_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{U}) \cdot R_{\mathfrak{J}}) \tag{4}$$

und

$$f_{\mathfrak{J}} : R \to R_{\mathfrak{J}} \tag{5}$$

der kanonische Homomorphismus von R in den Quotientenring $R_{\mathfrak{J}}$ von R ist. Falls $\mathfrak{U} = (0)$, so gilt bekanntlich

$$(0)_{\mathfrak{J}} = \bigcap \mathfrak{D} \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{D}$ alle $\mathfrak{J}$-primäre Ideale von R durchläuft. Ist insbesondere $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_i$ ein minimales Primideal von $\mathfrak{U}$, so ergibt sich aus (3) und (4)

$$\mathfrak{D} - i = f_{\mathfrak{J}}^{-1}(f_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{U}) \cdot R_{\mathfrak{H}J}. \tag{7}$$

Daraus ersieht man, dass die zu einem minimalen Primideal $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{U}$ gehörige Primärkomponente von ,U unabhänging von der Primärzerlegung von $\mathfrak{U}$ ist. Alle diese wohlbekannten Tatsachen kann man etwa in [**1**] oder [**2**] finden. Hier betrachten wir die Frage, unter welchen Bedingungen es zu einer vergegebenen endlichen Menge

$$P = \{\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_n\} \tag{8}$$

der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit

$$P = \mathrm{Ass}\,(\mathfrak{U}) \tag{9}$$

gibt. Es ist wohlbekannt ([**1**], 9.1), dass es ein solches Ideal $\mathfrak{U}$ sicherlich gibt, falls keines der Ideale $\mathfrak{J}_i$; ein minimales Primideal von (0) ist. Auch im Falle $P \subset \mathrm{Ass}\,(0)$ gibt es em solches Ideal $\mathfrak{U}$, denn es genügt in diesem Falle, aus der Primärzerlfgung von (0) alle den Primidealen aus $\mathrm{Ass}\,(0) \setminus P$ gehörenden Primärkomponenten von (0) wegzulassen, um so ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R zu erhalten. In der Bezeichnung

$$A = P \cap \mathrm{Min}\,(0), \;\; B = P \cap \mathrm{Ass}\,(0), \;\; C = P \setminus B \tag{10}$$

gibt es also ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit (9), falls

$$A = \emptyset, \;\text{ oder }\; C = \emptyset. \tag{11}$$

Dass es in den übrigen Fällen, also wenn

$$A \neq \emptyset \;\text{ und }\; C \neq \emptyset, \tag{11'}$$

so ein Ideal $\mathfrak{U}$ nicht immer gibt, ersieht man aus folgendem Beispiel.

Beispiel. Sei R ein kommutativer Noetherscher Ring, dessen Nullideal (0) als Durchschnitt endlich vieler unvergleichbarer Primideale $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r$ $(r > 1)$ darstellbar ist. Dann ist

$$\mathrm{Min}\,(0) = \mathrm{Ass}\,(0) = \{\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r\}$$

Nehmen wir weiter an, dass alle Ideale $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_r$ in einem Primideal $\mathfrak{J}$ von R enthalten sind. Für beliebige $\mathfrak{J}_i$-primäre Ideale $\mathfrak{D}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ gilt dann

$$\mathfrak{D}_n \supseteq (0)_{\mathfrak{J}_i} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_i \supseteq \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{D}_i,$$

wobei $n = r + 1$ und $\mathfrak{J}_n = \mathfrak{J}$. Deswegen gibt es kein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9).

Es gibt natürlich Ringe R, die alle Bedingungen aus diesem Beispiel erfüllen. Es reicht zunächst, den Polynomring $K[x_1, \dots, x_r]$ über einem Körper K zu wählen. In diesem Ring sind die Primideale $(x_1), \dots, (x_r)$ untereinander unvergleichbar und sind alle im Primideal $(x_1, \dots, x_r)$ enthalten. Nun gehe man zu dem Ring $R = K[x_1, \dots, x_r]/(x_1 l) \cap \dots \cap (x_r)$ über. R ist ein kommutativer Noetherschör Ring und sein Nullideal ist als Durchschnitt der untereinander unvergleichbarer Primideale $\mathfrak{J}_i = (x_i)/(x1) \cap \dots \cap (x_r)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, die alle in dem Primideal $\mathfrak{J} = (x_1, \dots, x_r)/(x_1) \cap \dots \cap (x_r)$ enthalten sind, darstellbar.

2. Hauptergebnis. Hauptergebnis dieses Artikels ist der folgende Satz. In diesem Satz werden auf eine endliche Menge (8) der Primideal von einem kommutativen Noetherschen Ring R die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gestellt, damit es ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9) gibt.

Satz. it Gegeben sei eine endliche Menge (8) der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R. Es gibt ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9) genau dann, wenn es eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{U}^{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B} \mathfrak{D}_i \tag{12}$$

mit

$$\mathfrak{U}^{(0)}_{\mathfrak{J}} \not\subseteq (0)_{\mathfrak{J}} \quad (\mathfrak{J} \in C) \tag{13}$$

gibt.

Beweis. Es gebe ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9). Aus der Primärzerlegung (1) erhält man die Primärzerlegung (12). Ist $C = \emptyset$, so ist (12) identisch mit (1), und die Bedingung (13) ist dann (formal) erfüllt; denn es gibt ja kein $\mathfrak{J} \in C$.

Falls $C \neq emptyset$, so erhält man aus Primärzerlegung (12) für jedes $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_j \in C$

$$\mathfrak{U}^{(0)}_{\mathfrak{J}} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B, \mathfrak{J}_i \subseteq frakJ} \mathfrak{D}_i \supseteq \bigcap_{\mathfrak{J}_i \in B} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{D}_j,$$

und wegen $(0)_{\mathfrak{J}} \subseteq \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_j$ gilt (13).

Es gebe umgekehrt eine Primärzerlegung (12) mit (13).

Ist $C = \emptyset$, so ist $P = B$, und man hat (9) für $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(0)}$. In diesem Fall ist die Voraussetzung über die Existenz der Primärzerlegung (12) mit (13) unnötig; denn wir haben bereits festgestellt, dass man in diesem Fall die Prim"arzerlegung von (0) erhält, indem man die zu Primidealen aus $P \setminus \operatorname{Ass}(\mathfrak{U})$ gehörenden Primärkomponenten weglässt.

Sei nun $C \neq \emptyset$. Die Ideale aus P kann man so numerieren, dass die ersten m die Menge B die übrigen $n-m$ die Menge C bilden und dass man dabei hat $\mathfrak{J}_i \not\subseteq \mathfrak{J}_j$ $(i > j = m+l, \ldots, n-1)$.

Wir setzen $k = n-m$ und zeigen durch Induktion in bezug auf k, dass es ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9) gibt.

Die letze Behauptung ist richtig für $k = 1$. Aus Primärzerlegung (12) ergibt sich, nämlich, wegen (13)

$$\mathfrak{U}^{(0)}_{\mathfrak{J}_{m+1}} = \bigcap_{\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1}} \mathfrak{D}_i \not\subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+1}}.$$

Nach (6) gibt es also ein $\mathfrak{J}_{m+1}$-primäres Ideal $\mathfrak{D}_{m+1}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{U}^{(0)}_{\mathfrak{J}_{m+1}} \not\subseteq \mathfrak{D}_{m+1}. \tag{14}$$

Dann ist aber

$$\mathfrak{U}^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{m+1} \mathfrak{D}_i \tag{15}$$

eine Primärzerlegung. Ist nämlich $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_{m+1}$, dann ist wegen (14)

$$\bigcap_{i \leq m, \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1}} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{J}_{m+1},$$

und das nicht möglich.

Hat man für ein $j \leq m$

$$\bigcap_{m+1 \geq i \neq j} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j,$$

dann hat man wegen $\mathfrak{J}_{m+1} \not\subseteq \mathfrak{J}_j$, $\bigcap\limits_{m \geq i \neq j} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j$, was bedeuten würde, dass (12) keine Primärzerlegung ist.

Nehmen wir nun an, die Behauptung wäre gültig für k und zeigen wir, dass sie auch für $k+1$ richtig ist.

Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{U}^{(k)} = \bigcap_{i=1}^{m+k} \mathfrak{D}_i \tag{16}$$

mit

$$\mathfrak{J}_i = \operatorname{rad}(\mathfrak{D}_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, m+k). \tag{17}$$

Wir behaupten, dass es ein $\mathfrak{J}_{m+k+1}$-primäres Ideal $\mathfrak{D}_{m+k+1}$ mit

$$\mathfrak{U}^{(k)} \not\subseteq \mathfrak{D}_{m+k+1} \tag{18}$$

gibt. Sonst hätte man

$$\mathfrak{U}^{(k)} \subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}}. \tag{19}$$

Aufgrund von (13) sieht man aber leicht, dass es nicht möglich ist. Aus

$$\mathfrak{U}^{(k)} = \mathfrak{U}^{(0)} \cap \left(\bigcap_{i=m+1}^{n+k} \mathfrak{D}_i \right)$$

und

$$\bigcap_{i=m+1}^{m+k} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{J}_0 \ \ (\mathfrak{J}_0 \in \operatorname{Ass}((0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}}))$$

folgt nämlich

$$\mathfrak{U}^{(0)}_{\mathfrak{J}_{m+k+1}} \subseteq (0)_{\mathfrak{J}_{m+k+1}},$$

im Gegensatz zu (13).

Ist das $\mathfrak{J}_{m+k+1}$-primäre Ideal $\mathfrak{D}_{m+k+1}$ so gewählt, dass es der Bedingung (18) genügt, so zeigen wir gleich, dass

$$\mathfrak{U}^{(k+1)} = \bigcap_{i=m+1}^{m+k} \mathfrak{D}_i \tag{20}$$

eine Primärzerlegung ist, was bedeutet, dass unsere Behauptung für $k+1$ richtig ist.

Aufgrund von (18) braucht man nur nachzuprüfen, dass

$$\bigcap_{j \neq i \leq m+k+1} \mathfrak{D}_i \not\subseteq \mathfrak{D}_j \ \ (j = 1, 2, \ldots, m+k). \tag{21}$$

Da für $j \leq m+k$, $\mathfrak{J}_{m+k+1} \not\subseteq \mathfrak{J}_j$, hätte man sonst

$$\bigcap_{j \neq i \leq m+k} \mathfrak{D}_i \subseteq \mathfrak{D}_j,$$

und deswegen wäre (16) keine Primärzerlegung.

Somit ist der Satz bewie sen.

3. Bemerkungen und Ergänzungen. *Bemerkung* 1. Für die Primärzerlegung (12) ist die Bedingung (13) genau dann erfüllt, wenn für jedes $\mathfrak{J} \in C$ entweder

$$B_{\mathfrak{J}} = \{\mathfrak{J}_i \in B : \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}\} \subset \{\mathfrak{J}' \in \operatorname{Ass}(0) : \mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}\} \tag{22}$$

oder es mindestens ein $\mathfrak{J}_i \in B_{\mathfrak{J}}$ gibt, so dass die $\mathfrak{J}_i$-primäre Komponente $\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{U}^{(0)}$ in keiner Primärzerlegung von (0) auftritt.

Bemerkung 2. Gilt für jedes $\mathfrak{J} \in C$ entweder

$$A_{\mathfrak{j}} = \{\mathfrak{J}_i \in A : \mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{J}\} \subset \{\mathfrak{J}' \in \operatorname{Min}(0) : \mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}\} \tag{23}$$

oder ist mindestens eines der Ideale $\mathfrak{J}_i \in A_{\mathfrak{J}}$ nicht die Primärkomponente von (0), so gilt (13) für das ideal (12), wobei

$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{J}_i \quad (\mathfrak{J}_i \in A) \tag{24}$$

$$\mathfrak{D}_i \mathfrak{J}_i\text{-primäre Komponente von } (0) \ (\mathfrak{J}_i \in B \setminus A). \tag{25}$$

Aufgrund der Bemerkung 2 aus dem Satz ergibt sich diese

Folgerung. Sei P eine endliche Menge (8) der Primideale eines kommutativen Noetherschen Ringes R, so dass unter Bezeichnung (10) kein Ideal aus

$$A' = \left\{ \mathfrak{J}_i \in A : \mathfrak{J}_i \subseteq \bigcup_{\mathfrak{J} \in C} \mathfrak{J} \right\} \tag{26}$$

primäre Komponente vom Nullideal (0) ist. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{U}$ von R mit der Eigenschaft (9).

Bemerkung 3. Die Bedingung in voriger Folgerung ist sicherlich erfüllt, wenn $A' = \emptyset$, also insbesondere wenn $A = \emptyset$. Die Folgerung umfasst somit den in der Einleitung erwähnten Spezialfall $A = \emptyset$. Für $C = \emptyset$ ist nach (26) $(0) \in A'$ oder $A' = \emptyset$, und die Bedingung der Folgerung ist wiederum erfüllt, falls $n > 1$; denn für $n > 1$ kann nicht $(0) \in A$ sein. Die Folgerung deckt also auch den Spezialfall $C = \emptyset$ (für $n > 1$).

Bemerkung 4. Die Bedingung der obigen Folgerung ist nur hinreichend. In dem Polynomring $K[x,y,z]$ sind nämlich (x), (x,y) und (x,y,z) Primideale. Ausserdem ist $(x) \cap (x,y)^3$ eine Primärzerlegung mit assozüerten Primidealen (x) und (x,y), die in dem Primideal (x,y,z) enthalten sind. Deswegen hat das Nullideal von

$$R = K[x,y,z]/(x) \cap (x,y)^3$$

die Primärzerlegung

$$(0) = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}_2',$$

mit assozüerten Primidealen

$$\mathfrak{J}_1 = (x)/(x) \cap (x,y)^3, \ \ \mathfrak{J}_2 = (x,y)/(x) \cap (x,y)^3,$$

wobei

$$\mathfrak{D}_2' = (x,y)^3/(x) \cap (x,y)^3.$$

Das Ideal

$$\mathfrak{J}_3 = (x,y,z)/(x) \cap (x,y)^3$$

von R ist ein Primideal und enthält die Primideale $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$.

Nehmen wir nun $n = 3$, $P = \{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3\}$. Dann hat man

$$A = \{\mathfrak{J}_1\}, \;\; B = \{\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2\}, \;\; C = \{\mathfrak{J}_3\}.$$

Ausserdem ist $A' = A$, und die Bedingung aus der Folgerung ist nicht erfüllt. Das Ideal

$$\mathfrak{D}_2 = (x, y)^2/(x) \cap (x, y)^3$$

ist $\mathfrak{J}_2$-primär, tritt aber als $\mathfrak{J}_2$-primäre Komponente von (0) nicht auf. Deswegen erfüllt nach Bemerkung 1 das Ideal

$$\mathfrak{U}^{(0)} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}_2$$

die Bedingung von unserem Satz, und es gibt somit eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{D}_2 \cap \mathfrak{D}_3$$

mit assozüerten Primidealen $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. V. Geramita, Ch. Smal, *Introduction to homological methods in commutative rings*, Queen's papers in pure and appl. mathematics, No 43, Kingston, Ontario, 1976.

[2] M. F. Atiyach, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading-Menlo Park – London – Don Mills, 1969.

Prirodno-matematički fakultet
71000 Sarajevo
Jugoslavija

(Eingengangen den 10 06 1982)