PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 32 (46), 1982, pp. 105–107.

ГОМЕОМОРФНОЕ РАСШИРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ ЦЕЛО

Александар Липковски

Пусть X и Y алгебраические многообразия над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0 и $f: X \to Y$ морфизм, являющийся гомеоморфизмом в топологиях Зарисского. В этой заметке рассматриваются глобальные свойства такого морфизма и доказывается, что он конечный. Пример такого морфизма — разрешение каспидальной особенности кривой.

С точки зрения коммутативной алгебры эта задача является частным случаем задачи изучения гомеоморфных расширений колец т.е. расширений $A \subset B$ у которых Spec$A$ гомеоморфно Spec$B$. Особый вид такой задачи рассмотрен в [1]. На алгебраическом языке в данной заметке получено утверждение в заглавии, причем под геометрическим кольцом понимается алгебра конечного типа над k.

Заметим, что X и Y можно считать неприводимыми т.к. f определяет взаимнооднозначное соотвествие между множествами неприводимых компонент.

Лемма 1. *Морфизм $f: X \to Y$, являющийся гомеоморфизмом, бирационален.*

Доказательство. f аффинный ([2], 4.2.2.1.) и конечного типа. Существуют открытые непустые $U \subset X$, $V \subset Y$ такие, что V нормально и $f: U \to V$ конечный. Поэтому ([3], II, § 5.3 т.7) существует точка $y \in V$ в которой f неразветвлено т.е. $\deg f = [K(X): K(Y)] = \operatorname{card} f^{-1}(y) = 1$ откуда $K(X) = K(Y)$.

Лемма 2. *Для любого $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$, морфизм $f: X \to Y$, являющийся гомеоморфизмом, индуцирует изоморфизм соответствующих полей вычетов $f_x^{\#}: k(y) \xrightarrow{\sim} k(x)$.*

Доказательство. Проводим индукцию по размерности. Для $\dim X = 0$ это очевидно. Пусть утверждение справедливо в размерности $<n$ и $\dim X = \dim Y = n$. На основании леммы 1 имеем замкнутые подмногообразия меньшей размерности $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ такие, что $f: X \setminus X' \xrightarrow{\sim} Y \setminus Y'$. Если

теперь $x \in X \setminus X'$, то $f_x^{\#}: \mathcal{O}_y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x$ и утверждение очевидно. Если же $x \in X'$, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{y,Y} & \to & \mathcal{O}_{y,Y'} \\ {\scriptstyle f_x^{\#}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{x,X} & \to & \mathcal{O}_{x,X'} \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки эпиморфны. Переходя к вычетам и пользуясь предположением индукции получаем требуемый изоморфизм.

Теорема. *Пусть $f: X \to Y$ морфизм неприводимых алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0 являющийся гомеоморфизмом в топологиях Зарисского. Тогда морфизм f собственный.*

Доказательство. Используем валюативный критерий. Достаточно показать, что для любого кольца нормирования R с полем частных K любой коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} R & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

допускает „сечение" $\operatorname{Spec} R \to X$. Пусть $\operatorname{Spec} K = \{a\}$, $\operatorname{Spec} R = \{b_0, b_1\}$ где b_0 общая, а b_1 замкнутая точки, $\mathcal{O}_{b_0} = k(b_0) = K$, $\mathcal{O}_{b_1} = R$, $k(b_1) = R/\mathfrak{M}$. Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "i"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & Z \arrow[ur, "q"'] \arrow[dl, "p"] & \\ \operatorname{Spec} R \arrow[rr, "g"'] & & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

где $Z = X \times_Y \operatorname{Spec} R$, а φ существует по универсальности. Если $z \in Z$ то $p(z) = b_i \in \operatorname{Spec} R$, $q(z) = x \in X$ и, как легко видеть, $x = x_i$. Значит, z лежит или над (b_0, x_0), или над (b_1, x_1). Но над (b_i, x_i) лежат точки из $\operatorname{Spec}(k(x_i) \otimes_{k(y_i)} k(b_i)) = \operatorname{Spec} k(b_i)$ т.е. одна точка r_i. При этом $r_i = p^{-1}(b_i)$. Поэтому $Z = \{r_0, r_1\}$ где r_0 общая, а r_1 замкнутая точки. Но Z схема, r_1 имеет (единственную) аффинную окрестность $Z = \operatorname{Spec} S$. Коммутативность левого треугольника диаграммы (1) означает, что $R \to \tilde{S}_{r_1} \subset k(r_0) \subset K$ есть вложение $R \subset K$ т.е. имеем $R \subset \tilde{S}_{r_1} \subset K$. Но R кольцо нормирования и ввиду минимальности, $R = \tilde{S}_{r_1}$. Имеем канонический морфизм $\psi: \operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} \tilde{S}_{r_1} \to \operatorname{Spec} S$ и его композиция с q дает требуемый морфизм $\operatorname{Spec} R \to X$, что непосредственно проверяется.

Следствие 1. *При условиях теоремы, морфизм f — конечный.*

Следствие 2. *При условиях теоремы, нормализация Y пропускается через f. Если Y нормально, то f изоморфизм. В частности, если X и Y*

неизоморфные кривые и Y гладкая, то никакой морфизм $f: X \to Y$ не может быть биекцией точек. Он должен что-нибудь склеивать.

Замечание 1. Морфизм f не обязательно плоский.

Пример. Нормализация каспидальной особенности. Пусть $A = k[x, y]/(y^2 - x^3) \cong k[t^2, t^3] \subset k[t] = B$, $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$ и f определен этим вложением. Очевидно, f биекция и поэтому гомеоморфизм. Пусть $K = k(t)$ общее поле частных колец A и B. Имеем $B \otimes_A K \cong K$ над A, откуда $\dim B \otimes_A K = \dim B_{(0)} = 1$. Но для $P = t^2 A + t^3 A \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{M} = PA_P$, как легко видеть, будет $\dim B \otimes_A A_P/\mathfrak{M} = \dim B_P/\mathfrak{M} B_P = 2$ т.е. размерность $B_P/\mathfrak{M} B_P$ над $A_P/\mathfrak{M}$ при $P \in \operatorname{Spec} A$ не является постоянной и B не может быть плоским A-модулем.

Замечание 2. Требование гомеоморфности f существенно в размерности $\geqslant 2$.

Пример ([3], стр. 159). Пусть $g: \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^4$, $(x, y) \mapsto (u, v, w, t)$ где $u = x$, $v = xy$, $w = y(y-1)$, $t = y^2(y-1)$. Положим $X = \mathbf{A}^2 \setminus (0, 0)$, $Y = g(X)$ и $f: X \to Y$ сужение g. Очевидно, g склеивает две точки $(0, 0)$ и $(0, 1)$ в одну $(0, 0, 0, 0)$, $X \setminus (0, 1) \cong Y \setminus (0, 0, 0, 0)$ и поэтому f является биекцией. Но f не конечен т.к. Y аффинно, а X нет.

Замечание 3. Алгебраическая замкнутость k существенна.

Пример. Проекция полукубической кривой $y^2 = x^3$ на ось $x = 0$ является биекцией $\mathbf{R}$-точек и поэтому гомеоморфизмом $X(\mathbf{R})$ и $Y(\mathbf{R})$, а Y негладко.

В заключение отметим, что если X нормально, то $f: X \to Y$ является нормализацией Y. Поэтому рассмотренная задача приводит к изучению многообразий с биективной нормализацией т.е. к изучению особых точек над которыми в нормализации лежит одна-единственная точка. Такие особенности называются униразветвленными. Алгебраически им соответствуют локальные области с локальным целым замыканием в собственном поле частных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Anderson, D. Dobbs, *Pairs of rings with the same prime ideals*, Can. J. Math. **32** (1980), 362—384.

[2] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, 2 .ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[3] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, Москва, 1972.

Одсек за математику
Природно математички факултет
11000 Београд

(Поступила 22 04 1982)