PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 31 (45) 1982, 129—140

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ, ОТВЕЧАЮЩИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМ САМОСОПРЯЖЕННЫМ РАСШИРЕНИЯМ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА H_1^α

Небойша Лажетич

(Представлено 29 мая 1981)

Введение

1. В этой работе продолжается изучение вопросов сходимости разложений по собственным функциям, отвечающих произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Шредингера

$$Lu=-u''+q(x)u, \tag{1}$$

для функций из класса Никольского $H_1^\alpha(G)$, $0<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$, имеющих компактный носитель в конечном интервале G. Точнее, результаты из статьи [4], относящиеся к функциям из класса $H_{p'}^\alpha(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $1<p'<+\infty$, перенесены на случай функций из класса $H_1^\alpha(G)$.

Предполагая, что потенциал $q(x)$ оператора (1) принадлежит классу $L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$, мы получили оценки типа Лоренца (см. [6], гл. II) коэффициентов Фурье этих функций и установили условия, обеспечивающие абсолютную и равномерную на всем замкнутом интервале $\overline{G}$ сходимость рассматриваемых разложений. Далее, на любом компакте интервала G получена точная по порядку оценка разности частичных сумм двух разложений, первое из которых отвечает произвольному неотрицательному самосопряженному расширению оператора (1), а второе — произвольному расширению такого же типа оператора

$$\hat{L}u=-u''+\hat{q}(x)u, \tag{2}$$

где $\hat{q}(x)\in L_{\hat{p}}(G)$, $1<\hat{p}\leqslant 2$.

2. Пусть $G=(a,b)$ — конечный интервал вещественной оси. Рассмотрим два произвольных неотрицательных самосопряженных расширений операторов (1) и (2), потенциалы которых удовлетворяют условиям

$$q(x)\in L_p(G),\ 1<p\leqslant 2,\ \hat{q}(x)\in L_{\hat{p}}(G),\ 1<\hat{p}\leqslant 2. \tag{3}$$

Обозначим через $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\hat{u}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полные в $L_2(G)$ и ортонормированные системы собственных функций, отвечающие этим расширениям, и через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\hat{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующие системы неотрицательных собственных значений, занумерованных в порядке неубывания.

Пусть $f(x)$ — функция из класса $L_1(G)$ и μ — произвольное положительное число. Составим частичные суммы порядка μ разложений функции $f(x)$ по системам $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\hat{u}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\sigma_\mu(x,f)=\sum_{\sqrt{\lambda_n}<\mu} f_n\cdot u_n(x), \quad \hat{\sigma}_\mu(x,f)=\sum_{\sqrt{\hat{\lambda}_n}<\mu} \hat{f}_n\cdot \hat{u}_n(x), \tag{4}$$

где f_n, $\hat{f}_n$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно систем $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\hat{u}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in \overset{0}{H}{}_1^{\alpha}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1+1/r$, *и* $q(x)\in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2\,(1/p+1/r=1)$. *Если* $\alpha>1/s$ $(0<s\leqslant r)$, *то справедлива оценка*

$$\Big\{\sum_{\sqrt{\lambda_n}\geqslant\mu} |f_n|^s\Big\}^{1/s}\leqslant\frac{C_1(f)}{\mu^{\alpha-1/s}}, \quad \mu\geqslant 1. \tag{5}$$

При этом величина $C_1(f)$ *не зависит от* μ.

Следствие. *Пусть* $f(x)\in \overset{0}{H}{}_1^{\alpha}(G)$, $\alpha>0$, и $q(x)\in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$. *Если* $\alpha>1$, *то ряд Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot u_n(x)$$

функции $f(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на всем замкнутом интервале* $\overline{G}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in \overset{0}{H}{}_1^{\alpha}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$. *Если потенциалы* $q(x)$ *и* $\hat{q}(x)$ *удовлетворяют условиям* (3), *то для разности частичных сумм* (4) *справедлива оценка*

$$|\sigma_\mu(x,f)-\sigma_\mu(x,f)|\leqslant C(f)\cdot\|f\|_{\overset{0}{H}{}_1^{\alpha}(G)}\cdot 1/\mu^{\alpha}, \quad \mu\geqslant 2, \tag{6}$$

равномерная относительно x *на любом компакте* K *интервала* G. *При этом постоянная* $C(f)$ *не зависит от* μ.

Замечание 1. Први условиях теоремы 2 из оценки (6) следует оценка

$$\sigma_\mu(x,f)-\hat{\sigma}_\mu(x,f)=o\,(1/\mu^{\alpha}), \quad \mu\to+\infty, \tag{7}$$

равномерная относительно x на любом компакте K интервала G. Эта оценка является точной по порядку в том смысле, что величину стоящую в правой части (7) нельзя заменить на $\theta(\mu)\cdot 1/\mu^{\alpha}$, где $\theta(\mu)$ — любая фиксированная функция, стремящаяся к нулю при $\mu\to+\infty$ (см. [3]).

Замечание 2. Ш. А. Алимов и И. Йо недавно другим методом получили оценку (6) для произвольной функции $f(x)$ из класса $H_1^\alpha(G)$, $0<\alpha<1$ (см. [5]).

3. Эта статья состоит из четырех параграфов. В **§1** приведены основные определения и некоторые известные результаты, играющие основную роль в наших рассмотрениях. В **§2** доказана лемма о порядке коэффициентов Фурье функций из класса $\overset{0}{H_1^\alpha}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1+1/r$. Этот результат, представляющий самостоятельный интерес, используется в **§3** для доказательства теоремы 1. В том же параграфе доказано и следствие теоремы 1. Последний параграф посвещен доказательству оценок (6) и (7).

§1. Основные определения и вспомогательные результаты

1. В начале определим класс Никольского $H_{p'}^\alpha(G)$, $\alpha>0$, $1\leqslant p'<\infty$ (см. [1] или [7]). Если k — целое неотрицательное число, то $\partial^k f(x)$ будет обозначать обобщенную производную порядка k функции $f(x)$ $(\partial^0 f(x)=f(x))$. Представим число α в виде $\alpha=k+\theta$, где $\theta\in(0,1]$. Будем говорить, что функция $f(x)$ из класса $L_{p'}(G)$ принадлежит классу $H_{p'}^\alpha(G)$, если для любого числа h справедливо сотношение

$$\|\partial^k f(x+h)-2\,\partial^k f(x)+\partial^k f(x-h)\|_{L_{p'}(G_{|h|})}\leqslant C\cdot|h|^\theta,$$

где $G_{|h|}=(a+|h|,\ b-|h|)$. Норма в пространстве $H_{p'}^\alpha(G)$ определяется равенством

$$\|f\|_{H_{p'}^\alpha(G)}=\|f\|_{L_{p'}(G)}+\sup_h |h|^{-\theta}\cdot\|\Delta_h^2\,\partial^k f(x)\|_{L_{p'}(G_{|h|})},$$

где введено обозначение

$$\Delta_h^2 f(x)=f(x+h)-2f(x)+f(x-h).$$

Через $\overset{0}{H_{p'}^\alpha}(G)$, будем обозначать множество функций из класса $H_{p'}^\alpha(G)$, имеющих в интервале G компактный носитель. Заметим, что если $f(x)\in\overset{0}{H_{p'}^\alpha}(G)$, то продолжая функцию $f(x)$ нулем за пределами интервала G, получим функцию $\tilde f(x)$, определенную на множестве E веществених чисел и принадлежащую классу $\overset{0}{H_{p'}^\alpha}(E)$.

2. Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — полная в $L_2(G)$ и ортонормированная система собственных функций, отвечающая произвольному неотрицательному самосопряженному расширению оператора (1) с потенциалом $q(x)$ из класса $L_1(G)$, и $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — соответствующая система неотрицательных собственных чисел. Напомним, что по определению функция $u_n(x)$ вместе со своей первой производной абсолютно непрерывна на любом отрезке интервала G, и удовлетворяет уравнению

$$-u_n''+q(x)\,u_n(x)=\lambda_n\cdot u_n(x)$$

почти всюду в интервале G (см. [2]).

В дальнейшем нам будут нужны следующие свойства собственных функций и собственных значений:

Если G — конечный интервал и $q(x)\in L_p(G)$, $1<p<+\infty$, то имеют место оценки

$$\text{а)}\quad \max_{x\in\overline{G}} |u_n(x)|\leqslant A, \qquad n\in N \tag{8}$$

$$\text{б)}\quad \sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\mu|\leq 1} 1\leqslant B, \qquad \mu>0\,. \tag{9}$$

При этом постоянная A не зависит от n, а постоянная B не зависит от λ_n и μ (см. [2]).

Заметим, что $u_n(a)$ и $u_n(b)$ определяются как пределы функции $u_n(x)$ при стремлении точки x к точкам a и b соответственно.

3. Важным вспомогательным результатом является следующая лемма о порядке коэффициентов Фурье функций из класса $\overset{0}{H}{}^{\alpha}_{p'}(G)$, доказанная в работе [4].

Лемма 1. *Пусть* $f(x)\in \overset{0}{H}{}^{\alpha}_{p'}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $1<p'<+\infty$, *и* $q(x)\in \in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$. *Обозначим через* r^* *число такое, что* $1/p^*+1/r^*=1$, *где* $1<p^*\leqslant \min\{p,\ p'\}$. *Тогда для любого* $\lambda>0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda} |f_n|^{r^*}\cdot\lambda_n^{\alpha\cdot r^*/2}\leqslant C_{p'}(f,r^*)\cdot\|f\|^{r^*}_{H^{\alpha}_{p'}(G)}\,. \tag{10}$$

При этом величина $C_{p'}(f,r^*)$ *не зависит от* λ_n *и* λ.

4. В доказательстве теоремы 2 основную роль играет следующая оценка частичной суммы $\sigma_\mu(x,f)$ разложения функции $f(x)$ из класса $\overset{0}{H}{}^{\alpha}_{p'}(G)$, доказанная в работе [4].

Пусть K — произвольный компакт, расположенный строго внутри интервала G, и R_0 — положительное число такое, что число $2R_0$ меньше расстояния компакта K от границы интервала G. Рассмотрим функцию

$$v_R(x,y;\ \mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\mu|x-y|}{|x-y|}, & |x-y|\leqslant R,\\ 0, \quad |x-y|>R\,, & \end{cases}$$

где $x\in K$, $y\in G$, $R\in[R_0,\ 2R_0]$, $\mu\geqslant 2$, и ее усреднение

$$S_{R_0}(v_R(x,y;\ \mu))=\frac{1}{R_0}\cdot\int\limits_{R_0}^{2R_0} v_R(x,y;\ \mu)\,dR. \tag{11}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $f(x) \in \overset{0}{H}{}^{\alpha}_{p'}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$, $1<p'<+\infty$, и $q(x)\in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$. *Имеет место оценка*

$$|\sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y)\, S_{R_0}(v_R(x,y;\mu))\,dy| \leqslant C(K,f,\alpha,r^*)\cdot \|f\|_{H^{\alpha}_{p'}(G)}\cdot 1/\mu^{\alpha}, \quad (12)$$

равномерная относительно x *на компакте* K. *Здесь* $C(K,f,\alpha,r^*)$ — *величина, не зависящая от* μ, а r^* — *число, определенное в формулировке леммы* 1.

§2. О коэффициентах Фурье функций из класса $\overset{0}{H}{}^{\alpha}_{1}(G)$

1. В этом параграфе докажем следующее важное предложение.

Лемма 3. *Пусть* $q(x)\in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$, и $f(x)\in \overset{0}{H}{}^{\alpha}_{1}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1+$ $+1/r$ $(1/p+1/r=1)$. *Тогда для любого числа* $r^*\geqslant r$ *такого, что* $0<\alpha-1/r^*\leqslant 1$, *имеет место оценка*

$$\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda} |f_n|^{r^*}\cdot \lambda_n^{r^*(\alpha-1/r^*)/2} \leqslant C_1(f,r^*)\cdot \begin{cases} \|f\|^{r^*}_{H^{\alpha}_{1}(G)}, & 0<\alpha\leqslant 1,\\ \|\tilde f\|^{r^*}_{H^{\alpha}_{1}(E)}, & 1<\alpha\leqslant 1+1/r. \end{cases} \quad (13)$$

При этом постоянная $C_1(f,r^*)$ *не зависит от* λ_n *и* λ.

Если $f(x)\in \overset{0}{H}{}^{\alpha}_{1}(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$, и $q(x)\in L_p(G)$, $1<p\leqslant 2$, то из оценки (13) можно получить оценку

$$f_n = O(1/(\sqrt{\lambda_n})^{\alpha}), \quad n\to+\infty. \quad (14)$$

Оценка (14) справедлива и в случае произвольной функции $f(x)$ из класса $H^{\alpha}_{1}(G)$, $0<\alpha<1$ (см. [5]).

2. Перейдем теперь к доказательству леммы 3. Обозначим через $\Omega(f)$ компактный носитель функции $f(x)$ и через $R(f)$ расстояние множества $\Omega(f)$ от границы интервала G. Пусть $\lambda\geqslant 1$ — число такое, что существуют собственные значения λ_n удовлетворяющие условию $\lambda\leqslant\lambda_n<4\lambda$, и $r^*\geqslant r$ — число такое, что $0<\alpha-1/r^*\leqslant 1$. Определим число

$$\xi(\lambda) = \frac{\|f\|^{r^*}_{H^{\alpha}_{1}(G)}}{\sum\limits_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda} \lambda_n^{r^*(\alpha-1/r^*)/2}}. \quad (15)$$

Продолжим функцию $f(x)$ нулем за пределами интервала G. Как уже замечено в **§1**, таким образом получим функцию $\tilde f(x)$, принадлежащую классу $\overset{0}{H}{}^{\alpha}_{1}(E)$. Обозначим через $\tilde f_\eta(x)$, $\eta>0$, η — усреднение по Соболеву функции $\tilde f(x)$ (см. [7], 1.4.). Тогда при $\eta<R(f)$ сужение $f_\eta(x)$ функции $\tilde f_\eta(x)$ на интервал G есть бесконечно дифференцируемая на G функция, имеющая компактный носитель $\Omega(f_\eta)$.

Имея в виду, что справедливо соотношение

$$\lim_{\eta\to 0}\|\tilde{f}-\tilde{f}_\eta\|_{L_1(G)}=0,$$

можем определить функцию $\tilde{f}_{\eta(\lambda)}(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\|f-f_{\eta(\lambda)}\|_{L_1(G)}\leqslant\xi(\lambda)^{\frac{1}{r^*}}/A \tag{16}$$

и

$$R(f)/2\leqslant R(f_{\eta(\lambda)}).$$

Здесь через $R(f_{\eta(\lambda)})$ обозначенно расстояние компакта $\Omega(f_{\eta(\lambda)})$ от границы интервала G.

С помощью соотношения (16) получим оценку

$$|f_n|\leqslant\xi(\lambda)^{1/r^*}+|f^n_{\eta(\lambda)}|, \tag{18}$$

где $f^n_{\eta(\lambda)}$ — коэффициент Фурье функции $f_{\eta(\lambda)}(x)$, отвечающий собственному значению λ_n. В силу (15) и (18) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda}|f_n|^{r^*}\cdot\lambda_n^{r^*(\alpha-1/r^*)/2}\leqslant 2^{r^*/p^*}\cdot\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda}|f^n_{\eta(\lambda)}|^{r^*}\cdot\lambda_n^{r^*(\alpha-1/r^*)/2}\\+2^{r^*/p^*}\cdot\|f\|^{r^*}_{H_1^\alpha(G)},\end{aligned} \tag{19}$$

где $1/p^*+1/r^*=1$.

Функция $f_{\eta(\lambda)}(x)$ принадлежит классу $\overset{0}{H}{}^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(G)$. Поэтому (см. лемму 1) имеет место оценка

$$\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda}|f^n_{\eta(\lambda)}|^{r^*}\cdot\lambda_n^{r^*(\alpha-1/r^*)/2}\leqslant C_{p^*}(f_{\eta(\lambda)},r^*)\cdot\|f_{\eta(\lambda)}\|^{r^*}_{H^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(G)}. \tag{20}$$

Остановимся теперь на этой оценке. Во-первых, используя (17) можно показать, что величина $C_{p^*}(f_{\eta(\lambda)},r^*)$ зависит не от функции $f_{\eta(\lambda)}(x)$, а только от функции $f(x)$, т.е. от числа $R(f)$. Для того чтобы в этом убедиться, надо просмотреть доказательство леммы 1 из статьи [4]. В дальнейшем эту величину будем обозначать через $C_{p^*}(f,r^*)$.

Во-вторых, справедлива оценка

$$\|f_{\eta(\lambda)}\|_{H^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(G)}\leqslant C(f,\alpha)\cdot\begin{cases}\|f\|_{H_1^\alpha(G)}, & 0<\alpha\leqslant 1,\\ \|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}, & 1<\alpha\leqslant 1+1/r,\end{cases} \tag{21}$$

где постоянная $C(f,\alpha)$ не зависит от функции $f_{\eta(\lambda)}(x)$, т.е. от λ.

3. В этом пункте докажем оценку (21). Заметим в начале, что имеет место соотношение

$$\|f_{\eta(\lambda)}\|_{H^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(G)}\leqslant\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{H^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(E)}. \tag{22}$$

Далее, в силу теоремы вложения (см. [7], 6.1., (6)), справедлива оценка

$$\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{H_{p^*}^{\alpha-1/r^*}(E)} \leqslant C\cdot\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{H_1^\alpha(E)}, \tag{23}$$

где константа C не зависит от функции $\tilde{f}_{\eta(\lambda)}(x)$.

Рассмотрим теперь функцию $\tilde{f}(x)$. С помощью соотношения (17) можно доказать оценку

$$\|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)} \leqslant [1+4(2/R(f))^\alpha]\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(G)}, \qquad 0<\alpha\leqslant 1. \tag{24}$$

Так как функция $\tilde{f}(x)$ принадлежит классу $H_1^\alpha(E)$, то для ее наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа ν справедлива оценка

$$E_\nu(f)_{L_1(E)} = \inf_{g_\nu\in L_1(E)}\|\tilde{f}-g_\nu\|_{L_1(E)} \leqslant \tilde{C}/\nu^\alpha\cdot\|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}, \qquad \nu>0, \tag{25}$$

где $g_\nu(x)$ — целая функция экспоненциального сферического типа ν.

При этом $\tilde{C}$ — постоянная, не зависящая от $g_\nu(x)$ и $\tilde{f}(x)$ (см. [7], 5.2.).

Обозначим через $g_\nu^{\eta(\lambda)}(x)$ $\eta(\lambda)$ — усреднение по Соболеву функци $g_\nu(x)$, т.е.

$$g_\nu^{\eta(\lambda)}(x) = \frac{1}{\eta(\lambda)}\cdot\int_E \varphi\left(\frac{u}{\eta(\lambda)}\right) g_\nu(x-u)\,du$$

(см. [7], 1.4.). Так как $g_\nu(x)$ — целая функция экспоненциального сферического типа ν, принадлежащая классу $L_1(E)$, а функция

$$F(u) = \frac{1}{\eta(\lambda)}\cdot\varphi\left(\frac{u}{\eta(\lambda)}\right)$$

принадлежит классу $L_1(E)$, то в силу теоремы 3.6.2., [7], функция $g_\nu^{\eta(\lambda)}(x)$ — целая экспоненциального сферического типа ν, принадлежащая классу $L_1(E)$. Кроме тога, имеет место неравенство

$$\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)} - g_\nu^{\eta(\lambda)}\|_{L_1(E)} \leqslant \|\tilde{f} - g_\nu\|_{L_1(E)}. \tag{26}$$

Итак, имея в виду (25) и (26), приходим к выводу, что справедлива оценка

$$E_\nu(\tilde{f}_{\eta(\lambda)})_{L_1(E)} \leqslant \tilde{C}/\nu^\alpha\cdot\|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}.$$

Но это означает, что к функции $\tilde{f}_{\eta(\lambda)}(x)$ можно применить теорему 5.4.2., [7]. Отсюда вытекает оценка

$$\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{H_1^\alpha(E)} \leqslant \tilde{A}\cdot(\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{L_1(E)} + \tilde{C}\cdot\|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}), \tag{27}$$

где константа $\tilde{A}$ не зависит от функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}_{\eta(\lambda)}(x)$. Так как всегда имеют место соотношения

$$\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{L_1(E)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{L_1(E)} \leqslant \|f\|_{H_1^\alpha(E)},$$

из (27) окончательно получим оценку

$$\|\tilde{f}_{\eta(\lambda)}\|_{H_1^\alpha(E)} \leqslant \tilde{A}(1+\tilde{C}) \cdot \|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}. \tag{28}$$

Пусть теперь $0<\alpha\leqslant 1$. Из оценок (22)—(24) и (28) следует оценка

$$\|f_{\eta(\lambda)}\|_{H_{p^*}^{\alpha-1/r^*}(G)} \leqslant C(1+\tilde{\tilde{C}})\tilde{\tilde{A}} \cdot [1+4(2/R(f))^\alpha] \cdot \|f\|_{H_1^\alpha(G)}.$$

Если же $1<\alpha\leqslant 1+1/r$, то из оценок (22), (23) и (28) следует оценка

$$\|f_{\eta(\lambda)}\|_{H_{p^*}^{\alpha-1/r^*}(G)} \leqslant C(1+\tilde{C})\tilde{A} \cdot \|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}.$$

Оценка (21) доказана.

Заметим, что константа C в оценке (23) не зависит от параметра r^* (см. [7], 6.3.). Таким образом, и величина $C(f, \alpha)$ в оценке (21) не зависит от числа r^*.

4. Закончим доказательство леммы 3. Из соотношений (19), (20) и (21) получаем окончательно оценку

$$\sum_{\lambda\leq\lambda_n<4\lambda} |f_n|^{r^*} \cdot \lambda_n^{(\alpha-1/r^*)r^*/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{r^*/p^*} \cdot [1+C_{p^*}(f, r^*)(C(f,\alpha))^{r^*}] \cdot \begin{cases} \|f\|_{H_1^\alpha(G)}^{r^*}, & 0<\alpha\leqslant 1, \\ \|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}^{r^*}, & 1<\alpha\leqslant 1+1/r. \end{cases}$$

Но это и есть оценка (13), если положить

$$C_1(f, r^*) = 2^{r^*/p^*} \cdot [1+C_{p^*}(f, r^*)(C(f,\alpha))^{r^*}]. \tag{29}$$

Осталось еще рассмотреть случай $0<\lambda<1$. В этом случае оценка (13) доказывается непосредственно, при помощи оценок (8) и (9). При этом

$$C_1(f, r^*) = 4B \cdot A^{r^*} \cdot 2^{r^*(\alpha-1/r^*)}. \tag{30}$$

Лемма 3 доказана.

5. Докажем теперь оценку (14). Пусть $f(x) \in \overset{0}{H}{}_1^\alpha(G)$, $0<\alpha\leqslant 1$. Тогда для любого числа r^* такого, что $r^*>\max\{r, 1/\alpha\}$, будет выполнено условие $0<\alpha-1/r^*\leqslant 1$. Для таких чисел r^* из оценки (13) получим оценку*)

$$|f_n| \leqslant (C_1(f, r^*))^{1/r^*} \cdot \|f\|_{H_1^\alpha(G)} \cdot \lambda_n^{-1/2\cdot(\alpha-1/r^*)}. \tag{31}$$

---

* Не умалая общности, можем считать, что $\lambda_n>0$, $n\in N$.

Рассмотрим функцию

$$g(r^*) = (C_1(f, r^*))^{1/r^*}.$$

В силу (29), эту функцию можно представить в виде

$$g(r^*) = 2^{1/p^*} \cdot C(f, \alpha)(C_{p^*}(f, r^*))^{1/r^*} \cdot \left[1 + \frac{1}{(C(f, \alpha))^{r^*} C_{p^*}(f, r^*)}\right]^{1/r^*}. \tag{32}$$

Полный анализ доказательства леммы 1 из статьи [4] и доказательств всех теорем из книги [7], использованных в доказательстве леммы 3, покажет, что функции $C(f, \alpha)$ и $C_{p^*}(f, r^*)$ имеют следующие свойства:

1) $C(f, \alpha) > 1$;

2) $\lim\limits_{r^* \to +\infty} C_{p^*}(f, r^*) = +\infty$:

3) $\lim\limits_{r^* \to +\infty} (C_{p^*}(f, r^*))^{1/r^*} = C(f, \infty) \neq 0$. (33)

Поэтому из (32) вытекает соотношение

$$\lim_{r^* \to +\infty} g(r^*) = 2\, C(f, \alpha) \cdot C(f, \infty) < +\infty.$$

Перейдем в неравенстве (31) к пределу при $r^* \to +\infty$. В силу предшествующего соотношения, оттуда получим оценку (14). Если функция $C_1(f, r^*)$ имеет вид (30), то оценка (14) тоже получается предельным переходом прямо из неравенства (31).

§3. Доказтельство теоремы 1 и ее следствия

1. Теорему 1 докажем следующим образом. Пусть $\mu \geqslant 1$. Положим $\lambda = \mu^2$ в оценку (13), считая, что число $r^* \geqslant r$ выбрано так чтобы было выполнено условие $\alpha - 1/r^* > 0$. Получим соотношение

$$\sum_{\mu \leq \sqrt{\lambda_n} < 2\mu} |f_n|^{r^*} \cdot \lambda_n^{r^*(\alpha - 1/r^*)/2} \leqslant C_1(f, r^*) \cdot D^{r^*},$$

где $D = \|f\|_{H_1^\alpha(G)}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, и $D = \|\tilde{f}\|_{H_1^\alpha(E)}$, при $1 < \alpha \leqslant 1 + 1/r$. Оттуда вытекает оценка

$$\sum_{\mu \leq \sqrt{\lambda_n} < 2\mu} |f_n|^{r^*} \leqslant C_1(f, r^*) \cdot D^{r^*} \cdot \frac{1}{\mu^{\alpha r^* - 1}}. \tag{34}$$

В силу неравенства Гельдера и оценок (9) и (34), имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{\mu \leq \sqrt{\lambda_n} < 2\mu} |f_n|^s \leqslant \{\sum_{\mu \leq \sqrt{\lambda_n} < 2\mu} |f_n|^{r^*}\}^{s/r^*} \cdot \{\sum_{\mu \leq \sqrt{\lambda_n} < 2\mu} 1\}^{1 - s/r^*} \leqslant$$

$$\leqslant (C_1(f, r^*))^{s/r^*} \cdot D^s \cdot \frac{1}{\mu^{\alpha s - s/r^*}} \cdot \left\{\sum_{k=[\mu]}^{[2\mu]} \left(\sum_{k \leq \sqrt{\lambda_n} < k+1} 1\right)\right\}^{1 - s/r^*} \leqslant \tilde{C}(f, r^*, s, B) \cdot \frac{1}{\mu^{\alpha s - 1}},$$

где $0 < s \leqslant r$, и $[\mu]$ — целая часть числа μ.

Используя эту оценку, убеждаемся, что при $\alpha > 1/s$ справедливы соотношения

$$\{\sum_{\sqrt{\lambda_n}\geq\mu} |f_n|^s\}^{1/s} = \{\sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{2^j\cdot\mu\leq\sqrt{\lambda_n}<2^{j+1}\cdot\mu} |f_n|^s)\}^{1/s} \leqslant$$

$$\leqslant (\tilde{C}(f, r^*, s, B))^{1/s} \cdot \frac{1}{\mu^{\alpha-1/s}} \cdot \left\{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha\cdot s-1}}\right)^j\right\}^{1/s} \leqslant C_1(f) \frac{1}{\mu^{\alpha-1/s}},$$

что и требовалось доказать.

2. Перейдем к доказательству следствия теоремы 1. Из оценки (5) при $s=1$ и оценки (8) вытекает следующая оценка остатка порядка μ ряда Фурье функции $f(x)$, равномерная относительно $x \in \bar{G}$:

$$|\sum_{\sqrt{\lambda_n}\geqslant\mu} f_n u_n(x)| \leqslant A \cdot C_1(f) \cdot 1/\mu^{\alpha-1}.$$

При $\alpha > 1$ отсюда следует наше утверждение.

§4. Доказательство теоремы 2

1. Пусть K — произвольный компакт, расположенный строго внутри интервала G. Тогда для функции (11) справедлива оценка

$$|S_{R_0}(v_R(x, y; \mu))| \leqslant \mu/\pi, \qquad \mu \geqslant 2, \tag{35}$$

равномерная относительно $x \in K$ и $y \in G$. Определим число

$$\xi(\mu) = \frac{\pi \cdot \|f\|_{H_1^\alpha(G)}}{\mu \cdot B \cdot ([\mu]+2)}. \tag{36}$$

Тогда существует достаточно маленькое число $\eta(\mu)$, $0 < \eta(\mu) < R(f)$, такое, что справедливо соотношение

$$\|f - f_{\eta(\mu)}\|_{L_1(G)} \leqslant \xi(\mu)/A^2, \tag{37}$$

где $f_{\eta(\mu)}(x)$ — сужение на $G\,\eta(\mu)$ — усреднения по Соболеву функции $\tilde{f}(x)$ и, кроме того, выполнено условие $R(f)/2 \leqslant R(f_{\eta(\mu)})$.

С помощью соотношений (35) — (37) получаем оценку

$$|\sigma_\mu(x, f) - \int_a^b f(y) S_{R_0}(v_R(x, y; \mu))\, dy| \leqslant \tag{38}$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{A^2 \cdot B \cdot \pi}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \|f\|_{H_1^\alpha(G)} + |\sigma_\mu(x, f_{\eta(\mu)}) - \int_a^b f_{\eta(\mu)}(y) S_{R_0}(v_R(x, y; \mu))\, dy|.$$

Для любого числа r^* такого, что $r^*>\max\{r, 1/\alpha\}$ будет $0<\alpha-1/r^*\leqslant 1$. Если p^* число такое, что $1/p^*+1/r^*=1$, то $p^*<p$ и функция $f_{\eta(\mu)}(x)$ принадлежит классу $\overset{0}{H}{}^{\alpha-1/r^*}_{p^*}(G)$. Поэтому в силу леммы 2 из (38) вытекает оценка

$$| \sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y)\, S_{R_0}(v_R(x,y;\mu))\,dy | \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{A^2\cdot B\cdot\pi}\right)\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(G)}+ \tag{39}$$

$$+C\left(K; f_{\eta(\mu)}, \alpha-\frac{1}{r^*}, r^*\right)\cdot\|f_{\eta(\mu)}\|_{H_{p^*}^{\alpha-1/r^*}(G)}\cdot\frac{1}{\mu^{\alpha-1/r^*}},$$

равномерная относительно x на компакте K. Применяя оценку (21), из соотношения (39) получим оценку

$$| \sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y)\, S_{R_0}(v_R(x,y;\mu))\,dy | \leqslant \left(1+\frac{1}{A^2\cdot B\cdot\pi}\right)\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(G)}+$$

$$+C\left(K; f_{\eta(\mu)}, \alpha-\frac{1}{r^*}, r^*\right)C(f,\alpha)\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(H)}\cdot\frac{1}{\mu^{\alpha-1/r^*}}. \tag{40}$$

Как замечено в пункте 3., §2, величина $C(f,\alpha)$ не зависит от параметров r^* и μ. Анализируя доказательство леммы 2, можем убедиться в том, что величина $C(K; f_{\eta(\mu)}, \alpha-1/r^*, r^*)$ не зависит от параметра μ и имеет свойство

$$\lim_{r^*\to+\infty} C(K; f_{\eta(\mu)}, \alpha-1/r^*, r^*)=C(K; f, \alpha, \infty)>0,$$

(см. [4], §2). Таким образом, в неравенстве (40) можно перейти к пределу при $r^*\to+\infty$ и получить оценку

$$| \sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y)\, S_{R_0}(v_R(x,y;\mu))\,dy | \leqslant$$

$$\leqslant\left[\left(1+\frac{1}{A^2\cdot B\cdot\pi}\right)+C(K;f,\alpha,\infty)\,C(f,\alpha)\right]\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(G)}\cdot 1/\mu^\alpha, \tag{41}$$

равномерную относительно x на компакте K.

Соответствующая оценка справедлива и для функции $\hat\sigma_\mu(x,f)$:

$$| \hat\sigma_\mu(x,f) - \int_a^b f(y)\, S_{R_0}(v_R(x,y;\mu))\,dy | \leqslant$$

$$\leqslant\left[\left(1+\frac{1}{\hat A^2\cdot\hat B\cdot\pi}\right)+\hat C(K;f,\alpha,\infty)\,\hat C(f,\alpha)\right]\cdot\|f\|_{H_1^\alpha(G)}\cdot 1/\mu^\alpha, \tag{42}$$

равномерно относительно x на компакте K.

Оценка (6) теперь немедленно вытекает из оценок (41) и (42). Теорема 2 доказана.

2. По поводу оценки (7) см. [4], §2, п.3. .

Автор благодарит профессора В. А. Ильина за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В. А., Алимов Ш. А., *Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I*, Дифференц. уравнения, 7(1971), 670—710.

[2] Ильин В. А., Йо И., *Равномерная оценка собственных функций и оценка сверху числа собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом из класса* L_p, Дифференц. уравнения, 15(1979), 1164—1174.

[3] Ильин В. А., Йо И, *Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма-Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции*, Дифференц. уравнения, 15(1979), 1175—1193.

[4] Лажетич Н., *О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма-Лиувилля, для функций из класса* H_p^α, *II*, Дифференц. уравнения, 19(1983), в печати.

[5] Alimov Š. A., Joó I., *Equiconvergence theorem with exact order for the functions of the Nikolski's class* H_1^α $(0<\alpha<1)$, to appear.

[6] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, Москва, 1961.

[7] Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1977.

Природно-математички факултет
Институт за математику
11000 Београд, Студентски трг 16
Југославија