PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 31 (45) 1982, 93—101

DIE WERTEVERTEILUNG DER ANZAHL DER NICHT-ISOMORPHEN ABELSCHEN GRUPPEN ENDLICHER ORDNUNG UND EIN VERWANDTES ZAHLENTHEORETISCHES PROBLEM

Ekkehard Krätzel

(Eingegangen den 15. 04. 1980)

1. Einleitung

Es bezeichne $a(n)$ die Anzahl der nicht-isomorphen Abelschen Gruppen der Ordnung n. Bekanntlich ist $a(n)$ eine multiplikative, primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktion mit $a(p^{\nu})=P(\nu)$, wobei $P(\nu)$ die Anzahl der Partitionen von ν angibt. P. Erdös und G. Szekeres [1] bewiesen

$$A(x)=\sum_{n\leqslant x} a(n)=cx+O(\sqrt{x}), \quad c=\prod_{\nu=2}^{\infty}\zeta(\nu),$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. In den vergangenen Jahren wurde diese Abschätzung von verschiedenen Autoren wesentlich verschärft, was hier nicht weiter von Interesse ist. D. G. Kendall und R. A. Rankin [6] betrachteten die Verteilung der Werte $m\geqslant 0$, die $a(n)$ annehmen kann, und erhielten

$$A_m(x)=\sum_{\substack{n\leqq x\\ a(n)=m}} a(n)\sim P_m x$$

mit $P_0=0$, $P_1=6/\pi^2$. Die übrigen Werte P_m werden weiter unten genau angegeben. Darüber hinaus gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m=1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} mP_m=c.$$

Die asymptotische Darstellung verschärfte A. Ivić [3] zu

$$A_m(x)=P_m x+O(\sqrt{x}\log x).$$

In dieser Note soll dieses Ergebnis weiter verbessert werden. Sei $m=2^d m'$ mit $m'\equiv 1$ (2), so soll

$$A_m(x)=P_m x+O\left(\sqrt{x}\,\frac{(\log\log x)^{d-1}}{\log x}\right)$$

gezeigt werden. Insbesondere für $d=0$, also für ungerades m, gilt sogar

$$A_m(x)=P_m x+O(\sqrt{x}\, e^{-a\delta(x)}).$$

Dabei sei $a>0$ und in der gesamten Arbeit

$$\delta(x)=(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}. \tag{1}$$

Für $k=1, 2, \ldots$ bezeichne stets n_k eine Zahl k-ter Art, also eine Zahl, in der jeder Primfaktor mindestens in der Potenz k vorkommt. Es sei $a_k(n)$, $a_1(n)=a(n)$, die Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von Zahlen k-ter Art und

$$\zeta_k(s)=\sum_{n_k=1}^{\infty} n_k^{-s}, \quad \zeta_1(s)=\zeta(s).$$

P. Erdös und G. Szekeres [1] untersuchten auch

$$A_k(x)=\sum_{n\leq x} a_k(n), \qquad N_k(x)=\sum_{n_k\leq x} 1$$

und erreichten

$$A_k(x)=c_{1,k}\, x^{1/k}+O(x^{1/(k+1)}),$$
$$N_k(x)=\gamma_{1,k}\, x^{1/k}+O(x^{1/(k+1)})$$

mit

$$c_{\nu,k}=\prod_{\substack{\mu=k\\ \mu\neq\nu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right), \quad \nu=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\gamma_{\nu,k}=\operatorname*{Res}_{s=1/\nu} \zeta_k(s), \quad \nu=k, k+1, \ldots, 2k-1. \tag{3}$$

Auch diese Ergebnisse wurden bereits mehrfach verbessert. Hier soll nun

$$A_{k,m}(x)=\sum_{\substack{n\leq x\\ a_k(n)=m}} 1, \quad A_{1,m}(x)=A_m(x)$$

untersucht werden. Es ergeben sich ganz entsprechende Ergebnisse wie oben für $A_m(x)$ angeführt.

2. Analytische Hilfsmittel

Für $\zeta_k(s)$ gilt mit $k>1$

$$\zeta_k(s)=\prod_p\left(1+\frac{p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)=\frac{1}{\zeta(2(k+1)s)}\prod_{\nu=k}^{2k-1}\zeta(\nu s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_k(n)}{n^s}, \tag{4}$$

wobei die Reihe für $\operatorname{Re}(s)>1/(2k+3)$ absolut konvergiert. Die multiplikative Funktion $a_k(n)$ besitzt die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_k(n)}{n^s}=\prod_{\nu=k}^{\infty}\zeta(\nu s).$$

Es erfolgen nun Angaben zur Funktion

$$F_{k,m}(s)=\sum_{\substack{n=1\\ a_k(n)=m}}^{\infty} n^{-s}.$$

Hilfssatz 1. *Es ist*

$$F_{k,o}(s)=\zeta(s)-\zeta_k(s)$$

$$F_{k,m}(s)=\zeta_k(s)\,F_k(s)\,B_{k,m}(s),\quad m\geqslant 1.$$

Dabei ist für $Re\ (s)>1/2k$

(5) $$F_k(s)=\prod_p\left(1-\frac{p^{-2ks}}{1-p^{-s}+p^{-ks}}\right)$$

und $B_{k,1}(s)=1$ *und für* $m>1$

(6) $$B_{k,m}(s)=\sum_{\substack{n_{2k}=1\\ a_k(n_{2k})=m}}^{\infty}\frac{1}{n_{2k}^{s}}\prod_{p|n_{2k}}\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}.$$

Beweis. Es ist $a_k(n)=0$ genau dann, wenn n keine Zahl k-ter Art ist. Ebenso ist $a_k(n)=1$, falls n eine Zahl k-ter Art, aber nicht durch die $2k$-te Potenz einer Primzahl teilbar ist. Daraus ergeben sich die Behauptungen für $m=0,\ 1$. Für $m>1$ setzen wir in

$$F_{k,m}(s)=\sum_{\substack{n_k=1\\ a_k(n_k)=m}}^{\infty}\frac{1}{n_k^{s}}$$

$n_k=n_k' n_{2k}$ mit $(n_k',\ n_{2k})=1$, wobei n_k' nicht durch die $2k$-te Potenz einer Primzahl teilbar ist. Dann ist mit (4) und (5)

$$F_{k,m}(s)=\sum_{\substack{n_{2k}=1\\ a_k(n_{2k})=m}}^{\infty}\frac{1}{n_{2k}^{s}}\sum_{n_k'=1}^{\infty}\frac{1}{n_k'^{s}},$$

$$\sum_{n_k'=1}^{\infty}\frac{1}{n_k'^{s}}=\prod_{p\nmid n_{2k}}\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)=\zeta_k(s)\,F_k(s)\prod_{p|n_{2k}}\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}.$$

Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Für* $Re\ (s)>1/2k$ *gilt*

$$F_k(s)\sum_{m=1}^{\infty}B_{k,m}(s)=1,$$

$$\zeta_k(s)\,F_k(s)\sum_{m=1}^{\infty}mB_{k,m}(s)=\prod_{\nu=k}^{\infty}\zeta(\nu s).$$

Beweis. Nach (5) und (6) ist

$$F_k(s)\sum_{m=1}^{\infty} B_{k,m}(s)=F_k(s)\sum_{n_{2k}=1}^{\infty}\frac{1}{n_{2k}^s}\prod_{p|n_{2k}}\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}=$$

$$=F_k(s)\prod_p\left(1+\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}\sum_{\nu=2k}^{\infty}p^{-\nu s}\right)=1,$$

$$\zeta_k(s)F_k(s)\sum_{m=1}^{\infty} mB_{k,m}(s)=\zeta_k(s)F_k(s)\sum_{n_{2k}=1}^{\infty}\frac{a_k(n_{2k})}{n_{2k}^s}\prod_{p|n_{2k}}\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}$$

$$=\zeta_k(s)F_k(s)\prod_p\left(1+\left(1+p^{-ks}\frac{1-p^{-ks}}{1-p^{-s}}\right)^{-1}\sum_{\nu=2k}^{\infty}\frac{a_k(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_k(n)}{n^s}=\prod_{\nu=k}^{\infty}\zeta(\nu s).$$

3. Allgemeine Abschätzung für $k \geqslant 1$

Es wird eine Abschätzung von $N_k(x)$ benötigt, wobei wir uns mit der folgenden begnügen. Es sei $q=k-1$ für $2\leqslant k\leqslant 4$ und $q=\left[\sqrt{\frac{8}{3}k}\right]$ für $k>4$. Dann folgt aus den Sätzen 8, 9, 10 aus [7]

$$N_k(x)=\sum_{\nu=k}^{k+q}\gamma_{\nu,k}\,x^{1/\nu}+O(x^{1/(k+q)-\varepsilon}) \tag{7}$$

mit geeignetem $\varepsilon>0$, wobei die $\gamma_{\nu,k}$ durch (3) gegeben sind. Für kleine Werte k geben die genannten Sätze sogar bessere Ergebnisse. Weitere Verbesserungen findet man für $k=2$ bei D. Suryanarayana und R. Sitaramachandra Rao [8] und für $k=3, 4, 5$ bei A. Ivić [5].

Satz 1. *Es sei*

$$q=\begin{cases} k-1 & \textit{für } 1\leqslant k\leqslant 4\\ \left[\sqrt{\frac{8}{3}k}\right] & \textit{für } k>4\end{cases}$$

und $0<\varepsilon<\frac{1}{k+q}-\frac{1}{2k}$. *Dann ist* $A_{1,0}(x)=0$ *und für* $k>1$

$$A_{k,0}(x)=x-\sum_{\nu=k}^{k+q}\gamma_{\nu,k}P_{\nu,k,m}\,x^{1/\nu}+O(x^{1/(k+q)-\varepsilon}). \tag{8}$$

Für $k\geqslant 1$ *und* $m\geqslant 1$ *ist*

$$A_{k,m}(x)=\sum_{\nu=k}^{k+q}\gamma_{\nu,k}P_{\nu,k,m}\,x^{1/\nu}+O(x^{1/(k+q)-\varepsilon}). \tag{9}$$

Dabei sind die $\gamma_{\nu,k}$ *durch* (3) *und* $P_{\nu,k,m}$ *durch*

$$P_{\nu,k,m}=F_k\left(\frac{1}{\nu}\right)B_{k,m}\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

gegeben. Überdies ist für $k\leqslant\nu<2k$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_{\nu,k,m}=1, \tag{10}$$

$$\gamma_{\nu,k}\sum_{m=1}^{\infty} m P_{\nu,k,m}=c_{\nu,k}, \tag{11}$$

wobei die $c_{\nu,k}$ *durch* (2) *gegeben sind.*

Beweis. Wegen

$$B_{k,0}(x)=[x]-N_k(x)$$

ist die Abschätzung (8) nur eine Umformulierung von (7). Zum Beweis von (9) geben wir von

$$F_{k,m}(s)=\zeta_k(s)F_k(s)B_{k,m}(s)$$
$$=\zeta_k(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_m(n)}{n^s}$$

aus, wobei die Reihe für $\mathrm{Re}(s)>1/2k$ absolut konvergiert. Dann ist

$$A_{k,m}(x)=\sum_{n_k n\leqslant x} b_m(n)=\sum_{n\leqslant x} b_m(n)N_k\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$=\sum_{n\leqslant x} b_m(n)\left\{\sum_{\nu=k}^{k+q}\gamma_{\nu,k}\left(\frac{x}{n}\right)^{1/\nu}+O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{1/(k+q)-\varepsilon}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung können wir auch für $k=1$ mit $q=0$ benutzen. Aus $1/(k+q)-\varepsilon>1/2k$ ergibt sich sofort (9).

Die Gleichungen (10) und (11) ergeben sich unmittelbar aus Hilfssatz 2.

4. Verschärfung der Abschätzung für ungerades m und $1\leqslant k\leqslant 4$

Satz 2. *Für ungerades m und* $1\leqslant k\leqslant 4$ *gilt mit* (1) *und geeignetem* $a>0$

$$A_{k,m}(x)=\sum_{\nu=k}^{2k-1}\gamma_{\nu,k}P_{\nu,k,m}x^{1/\nu}+O\left(x^{1/2k}e^{-a\delta(x)}\right).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1, (4) und (5) ist

$$F_{k,1}(s)=\frac{1}{\zeta(2ks)}\prod_{=k}^{2k-1}\zeta(\nu s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_k(n)}{n^s}, \tag{12}$$

wobei die Reihe für $\operatorname{Re}(s)>1/(2k+1)$ absolut konvergiert. Nach Hilfssatz 1 ist

$$F_{k,m}(s)=F_{k,1}(s)\,B_{k,m}(s). \tag{13}$$

In (6) stellen wir n_{2k} durch $n_{2k}=n^{2k}n_{2k+1}$ mit quadratfreiem n und $(n, n_{2k+1})=1$ dar. Dann ist

$$a_k(n_{2k})=a_k(n^{2k})\,a_k(n_{2k+1})=2^{\omega(n)}\,a_k(n_{2k+1}),$$

wenn $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n angibt. Folgich kann $a_k(n_{2k})=m\equiv 1\,(2)$ nur sein, wenn n_{2k} eine Zahl $(2k+1)$-ter Art ist. Daher besitzt $B_{k,m}(s)$ eine für $\operatorname{Re}(s)>1/(2k+1)$ absolut konvergente Dirchlet-Reihe. Folglich ist

$$F_{k,m}(s)=\frac{1}{\zeta(2ks)}\prod_{\nu=k}^{2k-1}\zeta(\nu s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho(n)}{n^s}, \tag{14}$$

wobei die Reihe für $\operatorname{Re}(s)>1/(2k+1)$ absolut konvergiert. Für $1\leqslant k\leqslant 4$ gilt für die aus

$$\prod_{\nu=k}^{2k-1}\zeta(\nu s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_k(n)}{n^s}$$

bestimmte Funktion $f_k(n)$ nach Satz 7 aus [7]

$$\sum_{n\leqslant x}f_k(n)=\sum_{\nu=k}^{2k-1}g_\nu\,x^{1/\nu}+O(x^{a_k})$$

mit angebbaren Konstanten g_ν und gewissen Zahlen $a_k<1/2k$, deren genauere Größe nicht interessiert. Die Anwendung des Satzes 2 von A. Ivić aus [4] auf die durch

$$\frac{1}{\zeta(2ks)}\prod_{\nu=k}^{2k-1}\zeta(\nu s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s} \tag{15}$$

bestimmte Funktion $h(n)$ liefert mit $a'>0$

$$\sum_{n\leqslant x}h(n)=\sum_{\nu=k}^{2k-1}g'_\nu\,x^{1/\nu}+O(x^{1/2k}e^{-a'\delta(x)}). \tag{16}$$

Schließlich ergibt sich aus (14)

$$\begin{aligned}
A_{k,m}(x)&=\sum_{nn'\leqslant x}\rho(n)\,h(n')\\
&=\sum_{n\leqslant x}\rho(n)\left\{\sum_{\nu=k}^{2k-1}g'_\nu\left(\frac{x}{n}\right)^{1/\nu}+O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2k}e^{-a'\delta(x/n)}\right)\right\}\\
&=\sum_{\nu=k}^{2k-1}\gamma_{\nu,k}P_{\nu,k,m}\,x^{1/\nu}+O(x^{1/(2k+1)+\varepsilon})\\
&=O\left(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}|\rho(n)|\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2k}e^{-a\delta(x)}\right)+O\left(\sum_{n>\sqrt{x}}|\rho(n)|\left(\frac{x}{n}\right)^{1/2k}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

5. Verschärfung der Abschätzung für gerades m und $1 \leqslant k \leqslant 4$

Hilfssatz 2. *Sei $d \geqslant 1$ und $\omega(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n. Dann gilt*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega(n)=d}} |\mu(n)| = O\left(\frac{(x \log\log x)^{d-1}}{\log x}\right) \tag{17}$$

und für $1 < y^2 < x$

$$\sum_{\substack{x/y < n \leqslant x \\ \omega(n)=d}} \frac{|\mu(n)|}{n} = O\left(\frac{\log y}{\log x} (\log\log x)^{d-1}\right). \tag{18}$$

Beweis. Die Abschätzung (17) ergibt sich unmittelbar aus Satz 437 von [2]. Für $d=1$ ist (18) sofort gegeben durch

$$\sum_{\substack{x/y < n \leqslant x \\ \omega(n)=d}} \frac{1}{p} = \log\,\log x - \log\,\log \frac{x}{y} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = O\left(\frac{\log y}{\log x}\right).$$

Und durch Induktion von $d-1$ auf d folgert man

$$\sum_{\substack{x/y < n \leqslant x \\ \omega(n)=d}} \frac{|\mu(n)|}{n} = \sum_{\substack{x/y < np \leqslant x \\ \omega(n)=d-1}} \frac{|\mu(n)|}{np} = \sum_{\substack{n \leqslant \sqrt{x} \\ \omega(n)-d-1}} \frac{|\mu(n)|}{n} \sum_{x/ny < p \leqslant x} \frac{1}{p} +$$

$$+ \sum_{p < \sqrt{x}} \frac{1}{p} \sum_{\substack{x/py < n \leqslant x/p \\ \omega(n)=d-1}} \frac{|\mu(n)|}{n} - \sum_{\sqrt{x}/y < p < \sqrt{x}} \; \sum_{\substack{x/py < n \leqslant \sqrt{x} \\ \omega(n)=d-1}} \frac{|\mu(n)|}{n} =$$

$$= O\left(\frac{\log y}{\log x} (\log\log x)^{d-1}\right)$$

unter Benutzung der Induktionsannahme für $d-1$ und der trivialen Abschätzung

$$\sum_{\substack{n \leqslant z \\ \omega(n)=t}} \frac{|\mu(n)|}{n} = O\left((\log\log z)^t\right).$$

Satz 3. *Für $m = 2^d m' \equiv 1\ (2)$, $d \geqslant 1$ und $1 \leqslant k \leqslant 4$ gilt*

$$A_{k,m}(x) = \sum_{\nu=k}^{2k-1} \gamma_{\nu,k} P_{\nu,k;\,m} x^{1/\nu} + O\left(x^{1/2k} \frac{(\log\log x)^{d-1}}{\log x}\right).$$

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 2 gehen wir von (12) und (13) aus. In (6) zerlegen wir n_{2k} in $n_{2k} = n^{2k} n_{2k+1}$ mit quadratfreiem n und $(n, n_{2k+1}) = 1$. Wegen

$$a_k(n_{2k}) = 2^{\omega(n)} a_k(n_{2k+1}) = 2^d m'$$

kann $\omega(n)$ die Werte von 0 bis d annehmen. Damit ergibt sich aus (12) und (13)

$$F_{k,m}(s) = \frac{1}{\zeta(2ks)} \prod_{\nu=k}^{2k-1} \zeta(\nu s) \sum_{t=0}^{d} \sum_{\substack{n=1 \\ \omega(n)=t}}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{2ks}} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{\rho_t(n')}{n'^s},$$

wobei die Reihen $\sum \rho_t(n') n'^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1/(2k+1)$ absolut konvergieren. Mit der durch (15) definierten Funktion $h(n)$ und ihrer Entwicklung (16) erhalten wir

$$A_{k,m}(x) = \sum_{t=0}^{d} \sum_{n^{2k} n' n'' \leqslant x} |\mu(n)| \, \rho_t(n') \, h(n'')$$

$$= \sum_{t=0}^{d} \sum_{\substack{n^{2k} n' \leqslant x \\ \omega(n)=t}} |\mu(n)| \, \rho_t(n') \left\{ \sum_{\nu=k}^{2k-1} g'_\nu \left(\frac{x}{n^{2k} n'} \right)^{1/\nu} + \right.$$

$$\left. + O\left(\left(\frac{x}{n^{2k} n'} \right)^{1/2k} e^{-a' \delta(xn^{-2k} n'^{-1})} \right) \right\} =$$

$$= \sum_{t=0}^{d} \sum_{\substack{n^{2k} \leqslant x \\ \omega(n)=t}} |\mu(n)| \left\{ \sum_{\nu=k}^{2k-1} g''_\nu \left(\frac{x}{n^{2k}} \right)^{1/\nu} + O\left(\left(\frac{x}{n^{2k}} \right)^{1/(2k+1)} \right) \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{n} x^{1/2k} e^{-a'' \delta(xn^{-2k})} \right) \right\}.$$

Mit (17) ist

$$A_{k,m}(x) = \sum_{\nu=k}^{2k-1} \gamma_{\nu,k} P_{\nu,k,m} x^{1/\nu} + O\left(x^{1/2k} \frac{(\log\log x)^{d-1}}{\log x} \right) + O(x^{1/2k} H), \tag{19}$$

wobei

$$H = \sum_{t=1}^{d} \sum_{\substack{\sqrt{x} < n^{2k} \leqslant x \\ \omega(n)=t}} \frac{|\mu(n)|}{n} e^{-a'' \delta(xn^{-2k})}$$

gesetzt wurde. Der Anteil, der aus $t=0$ oder $n^{4k} \leqslant x$ für $t > 0$ entnommen ist wurde bereits im ersten O-Glied von (19) berücksichtigt. Nun ist

$$H \leqslant \sum_{t=1}^{d} \sum_{\nu=0}^{[\sqrt{x}]-1} \sum_{\substack{x 2^{-\nu-1} \leqslant n^{2k} \leqslant x 2^{-\nu} \\ \omega(n)=t}} \frac{|\mu(n)|}{n} e^{-a'' \delta(2^\nu)}.$$

Mit Hilfe von (18) ist

$$H = O\left(\sum_{t=1}^{d} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\log\log x)^{t-1}}{\log x} e^{-a'' \delta(2^\nu)} \right) =$$

$$= O\left(\frac{(\log\log x)^{d-1}}{\log x} \right).$$

Setzt man dies in (19) ein, so hat man die Behauptung des Satzes.

LITERATUR

[1] P. Erdös, G. Szekeres, *Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem*, Acta Sci. Math. Szeged, 7 (1934), 95—102.

[2] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An indroduction to the theory of numbers*, fourth edition, Oxford, 1960.

[3] A. Ivić, *The distribution of values of the enumerating function of non-isomorphic abelian groups of finite order*, Arch. Math. 30 (1978), 347—379.

[4] A. Ivić, *A convolution theorem with applications to some divisor functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 24 (38) (1978), 67—78.

[5] A. Ivić, *On the number of finite non-isomorphic abelian groups in short intervals*, Math. Nachr. 101 (1981), 257—271.

[6] D. G. Kendall, R. A. Rankin, *On the number of Abelian groups of a given order*, Quart. J. Math. Oxford, 18 (1947), 197—208.

[7] E. Krätzel, *Zahlen k-ter Art*, Amer. J. Math., 94 (1972) 309—328.

[8] D. Suryanarayana, R. Sitaramachandro Rao, *The distribution of square-full integers*, Arkiv för Mat. 11(2) (1973), 195—201.

Sektion Mathematik
Friedrich-Schiller-Universität
DDR — 69 Jena