PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 30 (44), 1981, pp. 169–175

SUR LES LIMITES DES ZÉROS DU POLYNÔME

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}$$

D. M. Simeunović

(Communiqué le 9. XI 1979)

G. Pólya et G. Szegö ont considéré, dans [**1**] (tome, I, p. 109), le polynôme

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

de degré impair n, et démontr'e, que $n\to\infty$, on a pour son unique racine réelle $-x_n$

$$x_n=ns+\frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln\, n+\frac{s}{1+s}\ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{1+s}{s}\right)+o(1), \tag{2}$$

où s est la racine positive de l'équation

$$se^{1+s}=1.$$

Dans cet article on considère le polynôme (1) de degré n impair ou pair et on va démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *Tout zéro $z_k(k=1,1,\ldots,n)$ du polynôme* (1) *satisfait à l'inégalités*

$$(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}<|z_k|\leq n, \tag{3}$$

où s est la racine positive de l'équation

$$se^{1+s}=1\quad(0,278<s<0,279) \tag{4}$$

et où on a

$$\alpha_n=e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}.$$

Corollaire 1. *Pour tout zéro $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ du polynôme* (1) *on a les inégalités*

$$(5)\qquad (n+1)s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s\alpha_n}\ln(n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n}\ln[\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)] < |z_k| \le n.$$

Corollaire 2. *Pour tout zéro $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$ du polynôme* (1) *on a les inégalités*

$$(6)\qquad ns + \frac{s}{1+s}\ln n + \frac{s}{1+s}\ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{1+s}{s}\right) - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25 < |z_k| \le n$$

et les inégalités

$$(7)\qquad ns + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln n < |z_k| \le n.$$

Démonstration du théorme. Soit $z_k = x_k + iy_k$ un zéro arbitraire du polynôme (1). D'après [**1**] (tome I, p. 116, problème 23), il résulte que

$$(8)\qquad |z_k| \le n.$$

(Voir aussi [**2**]).

Pour chaque zéro du polynôme (1) on a ensuite

$$\begin{aligned} |e^{z_k}| = e^{x_k} &= \left| \frac{z_k^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z_k^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z_k^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots \right| \\ &\le \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &\le \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|z_k|}{n+2} + \frac{|z_k|^2}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{1-\frac{|z_k|}{n+2}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad e^{x_k} \le \frac{|z_k|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|z_k|}{n+2}}.$$

Démontrons que

$$(10)\qquad |z_k| > (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$$

Supposons qu'on a

$$(11)\qquad \begin{aligned} |z_k| &\le (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} = \\ &= \frac{n+1}{e^{1+s}}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \end{aligned}$$

On obtient de (9)

$$(12)\qquad e^{x_k} \le \frac{(n+1)^{n+1}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}}}{(n+1)!e^{n+1}\cdot e^{(n+1)s}\left\{1-\frac{(n+1)s}{n+2}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}\right\}}$$

D'après la formule de Stirling

$$(n+1)! > \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{2\pi(n+1)}}{e^{n+1}}$$

on aura, de (12)

(13)

$$e^{x_k} <$$

$$< \frac{1}{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot e^{(n+1)s} \cdot \frac{1-\frac{(n+1)s}{n+2}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1-s\alpha_n}}$$

où on a posé

$$\sqrt{2\pi(n+1)} = \frac{[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)}} \cdot [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}}}{1-s\alpha_n}.$$

On va démonter maintenant que

(14) $$[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(2+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n.$$

De l'inégalité

$$\frac{\ln t}{t-1} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t>0 \text{ et } t \neq 1)$$

obtenue par J. Karamata dans [**3**] (voir aussi [**4**]), on al'inégalitè

(15) $$t \leq e^{\frac{t-1}{\sqrt{t}}} \quad (t>1).$$

Si on pose, dans l'inégalité (15) $t = 2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)$, on obtient

$$2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1) \leq e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)-1}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} < e^{\frac{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}{\sqrt{2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)}}} =$$
$$= e^{\frac{\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)(n+1)}{\sqrt{n+1}}},$$

d'où

(16) $$x = [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} < e^{\frac{\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)}{2(1+s\alpha_n)\sqrt{n+1}}} < e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \alpha_n,$$

puisque $\dfrac{\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)}{2(1+s\alpha_n)} = \dfrac{\sqrt{2\pi}\left(1-se^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)}{2\left(1+e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)} < 1$, ce qui signifie que l'inégalité (14) est valable.

A la suite de (16) on a

$$\frac{1-\frac{(n+1)s}{n+2}\cdot x}{1-s\alpha_n} > \frac{1-\frac{(n+1)s}{n+2}\cdot \alpha_n}{1-s\alpha_n} > \frac{1-s\alpha_n}{1-s\alpha_n} = 1, \text{ e'est-à-dire}$$

(17) $$\frac{1-\frac{(n+1)s}{n+2}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}{1-s\alpha_n} > 1.$$

Nous démontrerons aussi que

$$[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{s\alpha_n}{2(1+s\alpha_n)}}e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+(n+1)}}}. \tag{18}$$

Pour obtenir l'inégalité (18), nous démontrerons d'abord l'inégalité

$$x^{\alpha_n}e \geq e^x \quad (1 \leq x \leq \alpha_n). \tag{19}$$

Considérons la fonction

$$f(x) = x^{\alpha_n}e^{1-x} - 1$$

qui donne $f'(x) = x^{\alpha_n-1}e^{1-x}(\alpha_n - x)$. Comme $f'(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$ et comme $f(1) = 0$, nous avons $f(x) \geq 0$ pour $1 \leq x \leq \alpha_n$, ce qui signifie que l'inégalité (19) est valable.

En utilisant (19) on obtient

$$x^{\alpha_n(n+1)s}e^{(n+1)s} \geq e^{(n+1)sx} \quad (1 \leq x \leq \alpha_n). \tag{20}$$

En posant, dans (20) $x = [2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}$, pour $1 \leq x \leq \alpha_n$, on obtient l'inégalité (18).

En prenant en considération les inégalités (17) et (18), l'inégalité (13) se reduit à

$$e^{x_k} < \frac{1}{e^{(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}}}. \tag{21}$$

Il résulte de l'inegalité (21)

$$x_k < -(n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}},$$

c'est-à-dire

$$|x_k| > (n+1)s[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}}. \tag{22}$$

En supposant que (11) est valable, nous avons obtenu (22), c'est-à-dire $|x_k| > |z_k|$, ce qui est impossible. Cette contradiction démontre (10).

On obtient, de (8) et de (10), l'inégalité (3), d'où il resulte que le théorème est démontré.

Démontrons encore les corollaires 1 et 2.

Si on pose, dans l'in'egalité $e^y \geq y (y \geq 0)$

$$y = \ln[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}},$$

on obtiendra

$$\begin{aligned}[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)]^{\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}} \geq 1+ \\ +\frac{1}{2(1+s\alpha_n)(n+1)}\ln[2\pi(1-s\alpha_n)^2(n+1)].\end{aligned} \tag{23}$$

A la suite de l'inégalité (23), l'inégalité (10) se réduit à

$$|z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s\alpha_n}\ln(n+1) + \frac{s}{1+s\alpha_n}\ln[\sqrt{2\pi}(1-s\alpha_n)], \tag{24}$$

ce qui, avec (8), donne (5).

Pour démontrer (6) nous ferons usage des inégalités suivates:

$$e^t \le 1+2t \quad (0 \le t \le 1), \tag{25}$$

$$\frac{\ln p}{p} \le \frac{1}{\sqrt{p}} \quad (p \ge 1), \tag{26}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Pour $t = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, on obtiendra, de (25)

$$\alpha_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}, \tag{28}$$

d'où

$$1 + s\alpha_n \le 1 + s + \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+s\alpha_n} \ge \frac{1}{1+s+\frac{2s}{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{1+s}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}}} \ge \frac{1}{1+s}\left[1 - \frac{s}{1+s}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right],$$

de sorte que

$$\frac{1}{2}\frac{s}{1+s\alpha_n} \ge \frac{1}{2}\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{29}$$

On a, de (28) $-s\alpha_n \ge -s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}}$, d'où

$$1 - s\alpha_n \ge 1 - s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}} = (1+s) - 2s - \frac{2s}{\sqrt{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$1 - s\alpha_n \ge (1+s)\left[1 - \frac{2s}{1+s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]. \tag{30}$$

On obtient de (29)

$$\frac{s}{1+s\alpha_n} \ge \frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}}. \tag{31}$$

En usant des inégalités (29), (30) et (31), on obtient de (24)

(32)
$$
\begin{aligned}
|z_k| > {} & (n+1)s + \left[\frac{1}{2}\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] \ln(n+1) + \\
& + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \ln\left\{\sqrt{2\pi}(1+s)\left[1 - \frac{2s}{1+s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]\right\} - \\
& = (n+1)s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln(n+1) + \frac{s}{1+s}\ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\
& - 2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \left[\frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\ln\sqrt{2\pi}(1+s)}{\sqrt{n+1}}\right] + \\
& + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \ln\left[1 - \frac{2s}{1+s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

On obtient, de l'inégalité (26), pour $p = \sqrt{n+1}$

$$
\frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}. \tag{33}
$$

En considérent les inégalités (27) et (33), on obtient ensuite de (32)

$$
\begin{aligned}
|z_k| > {} & (n+1)s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln(n+1) + \frac{s}{1+s}\ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \\
& - 2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \{1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)]\} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} + \\
& + \left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \ln\left[1 - \frac{2s}{1+s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
|z_k| > (n+1)s + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln(n+1) + \frac{s}{1+s}\ln[\sqrt{2\pi}(1+s)] - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25 \tag{34}
$$

puisque

$$
-2\left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \{1 + \ln[\sqrt{2\pi}(1+s)]\} > -0,25,
$$
$$
\left[\frac{s}{1+s} - \left(\frac{s}{1+s}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \ln\left[1 - \frac{2s}{1+s}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right] > -0,25
$$

On obtient de (34)

$$
|z_k| > ns + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln n + \frac{s}{1+s}\ln\left(\sqrt{2\pi}\frac{1+s}{s}\right) - \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} - 0,25, \tag{35}
$$

où on a posé $s = \frac{s}{1+s}\ln e^{1+s} = \frac{s}{1+s}\ln\frac{1}{s}$, à la suite de $ln(n+1) > \ln\, n$. Les inégalités (35) et (8) donnent (6).

À la suite de

$$\frac{s}{1+s}\ln\Big(\sqrt{2\pi}\frac{1+s}{s}\Big) > \frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} + 0,25$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns + \frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln n,$$

ce qui, avec (8), donne (7).

Nous avons démontré, de cette manière, le corollaire 2.

Comme on a

$$\frac{0,25}{\sqrt[4]{n+1}} < 0,25,$$

on obtient de (35)

$$|z_k| > ns\frac{1}{2}\frac{s}{1+s}\ln n + \frac{s}{1+s}\ln\Big(\sqrt{2\pi}\frac{1+s}{s}\Big) - 0,5.$$

REFERENCES

[1] G. Pólya and G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis (Zadači i teoremi iz analiza*, perevod s nemeckogo D. A. Rajkova, Moskva (1956).

[2] D. M. Simeunović, *Sur les zéros du polynôme* $\sum_{v=1}^{n}\frac{z^v}{v}$; $n = 1, 2, \ldots$, Matematički vesnik **2(17)** 1965, 259–261.

[3] J. Karamata, Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, knjiga I, sveska 1(1949), 78–79, *Pitanja i zadaci.*

[4] D. S. Mitrinović (saradnik P. M. Vasić), *Analitičke nejednakosti*, Beograd 1970.